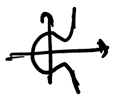
Riemannsche Flächen

Einleitung

Riemannsche Flächen sind topologische Räume, die lokal wie eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ aussehen.

Beispiel: $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{H}=\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$, ...

Viele Begriffe und Sätze aus der Funktionentheorie verallgemeinern sich zu Riemannschen Flächen.

 $y^2=x^3-x+1$

elliptische Kurven/$\mathbb{C}$ $\subset$ glatte projektive algebraische Kurven/$\mathbb{C}$ $\subset$ algebraische Varietäten/$\mathbb{C}$

schwierig! $\longrightarrow$ $\|$

kompakte Riemannsche Flächen $\subset$ Riemannsche Flächen $\subset$ komplexe Mfkeiten

Riemannsche Flächen $=$ 1-dim komplexe Mfkeiten $\downarrow$ 2-dim diff'bare Mfkeiten $\subset$ diff'bare Mfkeiten

komplexe Mfkeiten $\downarrow$ diff'bare Mfkeiten $\downarrow$ topologische Mfkeiten $\cap$ topologische Räume

Riemanns Motivation: mehrdeutige holomorphe Funktionen

Holomorphe Funktionen wie $z \mapsto \exp(z) = e^z$, $z \mapsto z^n$, ...
haben „mehrdeutige" Umkehrfunktionen.

<u>Beispiel</u>: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ $\quad \exp(z) = \exp(z + 2\pi i) \Rightarrow$ keine Umkehrfunktion.

aber es gibt lokale Umkehrfunktionen, die sogenannte Zweige des Logarithmus:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists \log"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad \exp(\log(z)) = z$$

nicht eindeutig

es gibt keine natürliche Auswahl eines Logarithmus.

<u>Riemann</u>: statt offene Teilmengen $U \subset \mathbb{C}$, soll man lokale Biholomorphismen $U \to \mathbb{C}$ erlauben.

Dann gibt es einen universellen Zweig des Logarithmus, dessen Definitionsbereich eine Riemannsche Fläche ist:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ R \arrow[ur, dashed, "\log"] \arrow[r, "\text{lokal Biholomorph}"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

$(z, \theta) \mapsto z$

$$R = \{ (z, \theta) : z = |z| e^{i\theta} \} \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$$

$$\log(z, \theta) = \log|z| + i\theta$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] \\ \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Ein Ziel dieses Kurses ist der Satz von Riemann-Roch.

Dieser Satz beantwortet die folgende Frage:

- Wie viele meromorphe Funktionen mit gegebenen Nullstellen und Polstellen gibt es auf einer kompakten Riemannschen Fläche X?

Solche meromorphe Funktionen bilden einen endlich-dim. $\mathbb{C}$-Vektorraum $H^0(X, \mathcal{O}(D))$.

Riemann : $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}(D)) \geq \deg D - g(X) + 1$.

Riemann-Roch : identifizieren die genaue Differenz zwischen beiden Seiten.
(1865)

Verallgemeinerungen:
- Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch
- Satz von Grothendieck-Riemann-Roch
- ...

Themen:
- holomorphe und meromorphe Funktionen auf R. Flächen.
- die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes
- verzweigte / unverzweigte Überlagerungen
- Garben, Funktionskeime und analytische Fortsetzung
- Differentialformen und Integration
- erste Kohomologiegruppe einer Garbe
- der Riemannsche Existenzsatz
- der Riemann-Rochsche Satz, Serresche Dualität, ...

Kapitel 1: Grundlegende Definitionen

Definition Sei X ein topologischer Raum.

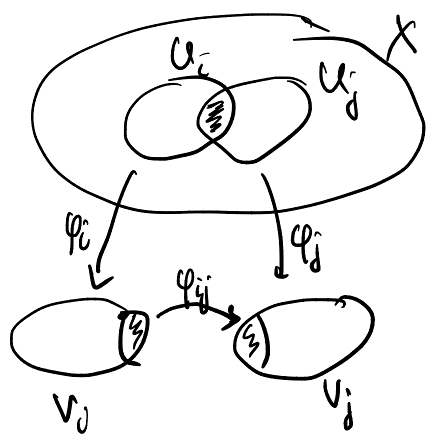
- Eine Karte auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$, wobei $U \subset X$ eine offene Teilmenge ist, und V ein topologischer Raum ist.

- Ein Atlas auf X ist ein System $\mathfrak{U} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ von Karten die X überdecken: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$

- Die Homöomorphismen

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

heißen die Kartenwechsel des Atlas.



Beob: $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$, $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{V_i}$,

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik} : \varphi_i(U_i \cap U_j \cap U_k) \to \varphi_k(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Definition. Sei X ein topologischer Raum.

- Ein eindimensionaler komplexer Atlas auf X ist ein Atlas $\mathfrak{U} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ wobei:
  - V_i eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist
  - φ_{ij} sind holomorph

- Zwei solche Atlanten $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ heißen äquivalent, falls ihre Vereinigung $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}'$ ein komplexer Atlas ist.

- Eine Äquivalenzklasse 1-dim. komplexer Atlanten heißt eine 1-dim komplexe Struktur auf X.

Bemerkung: Jede Äquivalenzklasse enthält einen eindeutigen maximalen Atlas, nämlich die Vereinigung aller Glieder der Äquivalenzklasse.

Definition: Eine Riemannsche Fläche, oder 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, ist ein Paar (X, Σ), bestehend aus:

- einem Hausdorffschen zweitabzählbaren topologischen Raum X
- einer 1-dim komplexen Struktur auf X.

Bemerkung: der Satz von Radó besagt, daß die Zweitabzählbarkeit überflüssig ist (wenn X zusammenhängend ist).
Aber das gilt nicht in höherer Dimension.

Man schreibt nur X statt (X, Σ). Unter einer Karte von X verstehen wir eine Karte des maximalen Atlas der komplexen Struktur.

Bemerkung: es gibt viele Arten von Mannigfaltigkeiten

	topologische Mfkeiten	C^k-diff'bare Mfkeiten	komplexe Mfkeiten	algebraische Varietäten / $\mathbb{C}$
Kartenbilder	$V \subset \mathbb{R}^n$	$V \subset \mathbb{R}^n$	$V \subset \mathbb{C}^n$	$V \subset \mathbb{C}^n$ algebraische Teilmengen
Kartenwechsel	stetig	C^k-diff'bar $k = \{1, 2, \ldots, \infty\}$	holomorph	polynomiell

Bemerkung: Manchmal sind Riemannsche Flächen zusammenhängend vorausgesetzt (wie z.B. in Forster)

Mit unserer Definition ist jede offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche wieder eine R. Fläche.

Erste Beispiele Riemannscher Flächen

- jede offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ ist eine R.F.: mit Atlas $\{\mathrm{Id}_U : U \to U\}$
- die Riemannsche Zahlenkugel (alias der 1-dim komplex-projektive Raum) ist folgende Riemannsche Fläche:

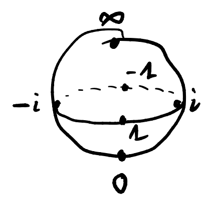
$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} \qquad \infty \notin \mathbb{C}$$

neues Symbol.

die Topologie auf $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist die Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$:

$$U \subset \mathbb{P}^1 \text{ offen} \iff \begin{array}{l} U \subset \mathbb{C} \text{ offen} \\ \text{oder } \infty \in U \text{ und } \mathbb{P}^1 \setminus U \subset \mathbb{C} \text{ kompakt.} \end{array}$$

also $\mathbb{P}^1 \cong S^2$



2 Karten: $\varphi_0 : \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

$\varphi_\infty : \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist $z \longmapsto \begin{cases} 1/z & \text{falls } z \in \mathbb{C} \\ 0 & \text{falls } z = \infty \end{cases}$

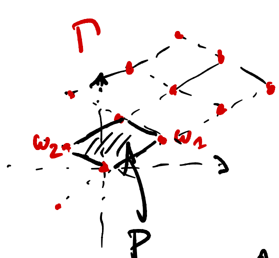
$$\begin{array}{ccc} \varphi_{0\infty} : \varphi_0(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}) & \longrightarrow & \varphi_\infty(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}) \\ \| & & \| \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z & \longmapsto & 1/z \end{array}$$

ist biholomorph.
(d.h. $\varphi_{0\infty}$ und $\varphi_{0\infty}^{-1} = \varphi_{\infty 0}$ sind holomorph)

$\Longrightarrow$ $\{\varphi_0, \varphi_\infty\}$ ist ein komplexer Atlas auf $\mathbb{P}^1$.

- Tori / elliptische Kurven.

Ein Gitter Γ auf $\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C},+)$, die zu $\mathbb{Z}^2$ isomorph ist und die $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufspannen.



$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\cong} & \Gamma \subset \mathbb{C} \\ (1,0) & \longmapsto & w_1 \\ (0,1) & \longmapsto & w_2 \end{array}$$

$$\Gamma = \{ n w_1 + m w_2 \ : \ n, m \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{C}$$

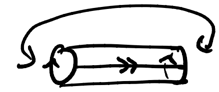
Auf der Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Gamma$ kann man eine komplexe Struktur wie folgt definieren:

Sei $\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion
Wir betrachten $\mathbb{C}/\Gamma$ als topologischen Raum mit der Quotienten-Topologie:

$$U \subset \mathbb{C}/\Gamma \text{ offen} \iff \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C} \text{ offen}$$

dann ist $\mathbb{C}/\Gamma$ zu einem Torus homöomorph

Sei $P = \{ \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda,\mu \in [0,1] \}$

dann $\mathbb{C}/\Gamma \cong$  mit verklebten gegenüberliegenden Seiten 

ein konkreter Homöomorphismus ist

$$f : \mathbb{C}/\Gamma \xrightarrow{\cong} S^1 \times S^1 \qquad S^1 \subset \mathbb{C}$$

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \bmod \Gamma \longmapsto \left(e^{2\pi i \lambda}, e^{2\pi i \mu}\right)$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

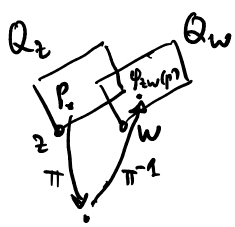
Karten: sei $Q_z = z + \mathring{P} \subset \mathbb{C}$

$\pi|_{Q_z} : Q_z \longrightarrow \pi(Q_z) \subset \mathbb{C}/\Gamma$ ist ein Homöomorphismus

Sei $\varphi_z : \pi(Q_z) \longrightarrow Q_z$ die Umkehrabbildung.

<u>Behauptung</u>: $\{\varphi_z : z \in \mathbb{C}\}$ ist ein komplexer Atlas auf $\mathbb{C}/\Gamma$.

Beweis. Für den Kartenwechsel φ_{zw} gilt



$$\pi(\varphi_{zw}(p)) = \pi(p) \quad \text{für all } p \in Q_z.$$

$$\Longrightarrow \quad p - \varphi_{zw}(p) \in \Gamma$$

$\Gamma \subset \mathbb{C}$ ist <u>diskret</u> $\Longrightarrow$ $\mathrm{Id} - \varphi_{zw}$ ist lokal konstant

$\Longrightarrow$ φ_{zw} ist holomorph.

<u>Bemerkung</u>. Elliptische Kurven sind eine Art von algebraischen Kurven, die man auch über einem beliebigen Körper K betrachten kann.
Falls $K = \mathbb{C}$, sind elliptische Kurven genau diese Tori (bis auf Isomorphie).

Erinnerung (holomorphe Funktionen)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

i) f ist komplex differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in U$, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert} \qquad (\text{wird mit } f'(z_0) \text{ bezeichnet})$$

ii) u, v sind reell differenzierbar (in jedem Punkt) und erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

iii) f ist komplex analytisch in jedem Punkt $z_0 \in U$, d.h. sie läßt sich um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}$$

für alle z in einer Umgebung von z_0.

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, heißt f <u>holomorph</u> auf U.
f heißt holomorph im Punkt z_0, falls sie in einer Umgebung von z_0 holomorph ist.

<u>Satz</u>: f holomorph $\Rightarrow$ f' holomorph.
Insbesondere ist f unendlich komplex differenzierbar.

<u>Bemerkung</u> (Orientierbarkeit von Riemannschen Flächen) $U \subset \mathbb{C}$.

Ist $\underset{u+iv}{\varphi} : U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann hat die Jacobi-Matrix von φ folgende Gestalt:

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$$

nach den Cauchy-Riemannschen Gleichungen.

$$\det J(\varphi) = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$$

Es folgt, daß jede Riemannsche Fläche kanonisch <u>orientierbar</u> als diff'bare Mannigfaltigkeit ist.

z.B. der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^2$
oder die Kleinsche Flasche besitzen keine komplexe Struktur,
weil sie nicht orientierbar sind.

Definition Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn für jede Karte $\varphi: U \to V \subset \mathbb{C}$ auf X die Funktion

$$f \circ \varphi^{-1} : V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{C}$$

holomorph ist.

Die Menge aller auf X holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{O}(X)$ bezeichnet.

Bemerkungen:
- Die gestellte Bedingung braucht man nicht für alle Karten φ überprüfen, sondern nur für eine Familie von Karten, die X überdeckt.
- Da Summen und Produkte holomorpher Funktionen wieder holomorph sind, ist $\mathcal{O}(X)$ eine $\mathbb{C}$-Algebra : $f+g$
(kommutativ mit Eins) $f \cdot g$.

Beispiel: Ist $\varphi: U \to V \subset \mathbb{C}$ eine Karte auf X, dann ist $\varphi \in \mathcal{O}(U)$.

Definition: Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt holomorph, wenn f stetig ist und für jede Karte $\varphi: U \to V \subset \mathbb{C}$ auf Y, die Funktion

$$f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi} V \subset \mathbb{C} \quad \text{holomorph ist.}$$

Bmk.
- Wenn $Y = \mathbb{C}$: holomorphe Abbildungen $X \to \mathbb{C}$ $\equiv$ holomorphe Funktionen auf X.
- Die Verkettung von zwei holomorphen Abbildungen ist wieder holomorph. Insbesondere: sei $f: X \to Y$ holomorph. Dann induziert f einen $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus:

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

Außerdem: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
$\Rightarrow$ $\mathcal{O}$ ist ein kontravarianter Funktor
$\{\text{Riemannsche Flächen}\} \longrightarrow \{\text{kommutative } \mathbb{C}\text{-Algebren}\}$.

Erinnerung: isolierte Singularitäten

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f: U \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

Dann heißt z_0 eine isolierte Singularität von f.

Satz f läßt sich eindeutig in eine Laurentreihe um z_0 entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Die minimale k mit $a_k \neq 0$ heißt die Ordnung von f in z_0.

Ordnung
- $k = +\infty$: $f \equiv 0$
- $k \in [1, \infty]$: z_0 ist eine Nullstelle von f k-ter Ordnung.
- $k \in [0, \infty]$: z_0 eine hebbare Singularität von f
  $\iff$ f ist auf U holomorph fortsetzbar.
- $k \in (-\infty, -1]$: z_0 ist eine Polstelle $(-k)$-ter Ordnung von f
- $k = -\infty$: z_0 ist eine wesentliche Singularität von f
  (typisches Beispiel: $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ mit $z_0 = 0$)

Korollar (Charakterisierung von hebbaren Singularitäten und Polstellen)

- (Riemannscher Hebbarkeitssatz): z_0 ist eine hebbare Singularität
  $\iff$ f ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt.
- z_0 ist eine Polstelle $\iff$ $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

  $\Rightarrow$: klar

  $\Leftarrow$: $1/f$ hat eine Nullstelle in z_0

  $1/f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ mit $k \geq 1$ und g holomorph und $g(z_0) \neq 0$.

  $\Rightarrow (z - z_0)^k f(z) = 1/g(z)$ ist holomorph auf U.

Definition. Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine <u>meromorphe Funktion</u> auf X ist eine holomorphe Funktion $f: X \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei:

$P \cap K$ ist endlich für jedes Kompaktum $K \subset X$

- P ist eine lokal endliche Teilmenge von X
- für alle $p \in P$ gilt: $\lim\limits_{z \to p} |f(z)| = +\infty$

Die Punkte in P heißen die <u>Polstellen</u> von f.
Die Menge aller auf X meromorphen Funktionen wird mit $\mathcal{M}(X)$ bezeichnet.

<u>Bemerkung</u>.
- Da X lokalkompakt ist, lokal endlich $\equiv$ diskret + abgeschlossen
- In einer Umgebung jedes Punktes $p \in X$ läßt sich f in eine Laurentreihe entwickeln:
$$f = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n,$$
wobei $z: U \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$ eine Karte ist, mit $z(p) = 0$.
($f \circ z^{-1}: V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion)
- $\mathcal{M}(X)$ ist in natürlicher Weise eine $\mathbb{C}$-Algebra:
$$f_1: X \setminus P_1 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad f_1 + f_2 : X \setminus P \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f_2: X \setminus P_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
wobei $P = \underbrace{P_1 \cup P_2}_{\text{lokal endlich}} \setminus \{\text{hebbare Singularitäten von } f_1 + f_2\}$.
$f_1 \cdot f_2$ wird ebenso definiert.
Außerdem ist $\mathcal{O}(X)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}(X)$.

<u>Warnung</u>: $\mathcal{M}$ ist kein Funktor! Wenn $f: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung ist, gibt es im allgemeinen <u>keine</u> Abbildung
$$f^*: \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$
Zum Beispiel: $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \equiv 0$
$\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(z) = 1/z$

$\varphi \circ f$ ist „identisch ∞“.

Beispiele

- Sei $F(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$

  F ist eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, weil

  $$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{auf } \mathbb{P}^1}} |F(z)| = +\infty \qquad (\text{wenn } n \geq 1)$$

  Um ∞, hat F die Laurentreiheentwicklung:

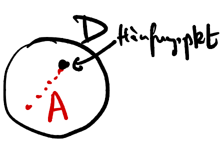
  $$F = \frac{a_n}{w^n} + \frac{a_{n-1}}{w^{n-1}} + \dots + a_0 \quad \text{mit } w = \varphi_\infty : \begin{array}{l} \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \infty \longmapsto 0 \\ z \longmapsto 1/z \end{array}$$

- $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist kein meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$:

  (∞ ist ein wesentliche Singularität)

  $$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \text{auf } \mathbb{P}^1}} |\exp(z)| \quad \text{existiert nicht.}$$

Erinnerung: (Identitätsatz)



Seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (offen + zusammenhängend) und $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen.
Sei $A \subset D$ eine Teilmenge, die einen Häufungspunkt in D besitzt.
Wenn $f_1|_A = f_2|_A$, dann $f_1 = f_2$ auf D.

Satz (Identitätssatz für Riemannsche Flächen)
Seien X, Y Riemannsche Flächen, mit X zusammenhängend.
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge, die einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt.
Seien $f_1, f_2 : X \to Y$ holomorphe Abbildungen.

$$\text{Wenn } f_1|_A = f_2|_A \implies f_1 = f_2 \text{ auf } X.$$

Beweis. Sei $M = \{ x \in X : f_1 = f_2 \text{ in einer Umgebung von } x \}$
Ziel: $M = X$.

Da X z.h. ist, es genügt zu zeigen, daß M offen, abgeschlossen und nicht leer ist.

- M ist offen: nach Definition

• $M \neq \emptyset$: f_1, f_2 stetig, Y Hausdorff $\Rightarrow$ $f_1(a) = f_2(a) =: b$

Wir wählen Karten $\varphi: U \to V \subset \mathbb{C}$ auf X mit $a \in U$
$\psi: U' \to V' \subset \mathbb{C}$ auf Y $b \in U'$
und $f_1(U) \subset U'$
$f_2(U) \subset U'$
U Zsh.

$\varphi(a)$ ist ein Häufungspunkt von $\varphi(U \cap A)$ in V
$\psi \circ f_{1,2} \circ \varphi^{-1}: V \to \mathbb{C}$ holomorph

Nach dem Identitätssatz auf $V \Rightarrow f_1 = f_2$ auf U.
$\Rightarrow a \in M$.

• M ist abgeschlossen: sei $x \in \overline{M}$. Dann ist x ein Häufungspunkt von M und $f_1 = f_2$ auf M

$\Rightarrow$ (genau wie vorher, mit $\underset{x}{M}$ <u>anstelle von</u> $\underset{a}{A}$) $x \in M$. ∎

<u>Satz</u> (meromorph ~ holomorph nach $\mathbb{P}^1$)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine bijektive Abbildung:

$$\mathcal{M}(X) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{l} \text{holomorphe Abbildungen } X \longrightarrow \mathbb{P}^1, \\ \text{die keine Zusammenhangs-Komponente von } X \\ \text{auf } \infty \text{ abbilden} \end{array} \right\}$$

$$\text{Ψ}$$

$$(f: X \setminus P \to \mathbb{C}) \longmapsto \left(\begin{array}{l} \hat{f}: X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \notin P \\ \infty & \text{wenn } x \in P \end{cases} \end{array} \right)$$

Beweis. • $\hat{f}$ ist holomorph:
Sei $p \in P$ eine Polstelle.
Da $\lim_{z \to p} |f(z)| = +\infty$, gibt es eine Karte $\varphi: U \to V \subset \mathbb{C}$
um p, so daß $\hat{f}(U) \cap B(0,1) = \emptyset$

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} & \infty & z \\ \varphi \downarrow \cong & & \cong \downarrow \varphi_\infty & \downarrow & \downarrow \\ V & \underset{\varphi_\infty \circ \hat{f} \circ \varphi^{-1}}{\dashrightarrow} & \mathbb{C} & 0 & 1/z \end{array}$$

Nach der Auswahl von U, ist $\varphi_\infty \circ \hat{f} \circ \varphi^{-1}$ beschränkt ($|\cdot| \leq 1$) und damit holomorph (nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz).

- die Abbildung injektiv ist: klar, weil $f = \hat{f}|_{X-P}$.
- die Abbildung ist surjektiv:

sei $g : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ im Zielbereich

Wir wollen zeigen, daß $g^{-1}(\infty)$ diskret ist

(denn ist $g = \hat{f}$ mit $f = g|_{X - g^{-1}(\infty)}$)

Aber wenn nicht, dann ist $g \equiv \infty$ auf einer Zusammenhangskomponente nach dem Identitätsatz. $\boxed{B}$

<u>Folgerung</u> X zusammenhängende Riemannsche Fläche $\Longrightarrow$ der Ring $\mathcal{M}(X)$ ist ein Körper.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{M}(X) - \{0\}$.

$\hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist nicht identisch null

$\underset{\text{Identitätsatz}}{\Longrightarrow}$ ihre Nullstellenmenge N ist diskret.

$\Longrightarrow$ $1/f : X \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}$ ist ein meromorphe Funktion auf X. Und $f \cdot 1/f = 1$. $\boxed{B}$

<u>Bemerkung</u>: $X = \coprod_{i \in I} X_i \Longrightarrow \mathcal{M}(X) = \prod_{i \in I} \mathcal{M}(X_i)$

$$\mathcal{O}(X) = \prod_{i \in I} \mathcal{O}(X_i)$$

Deshalb: $\mathcal{M}(X)$ ist ein Körper $\Longleftrightarrow$ X zusammenhängend.

Satz (Lokale Gestalt holomorpher Abbildungen)

Sei $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, $a \in X$ und $b = f(a) \in Y$.

Ist f bei a nicht konstant, so gibt es eine eindeutige Zahl $k \geq 1$ und Karten $\varphi: U \to V$ auf X, $\psi: U' \to V'$ auf Y, so daß:

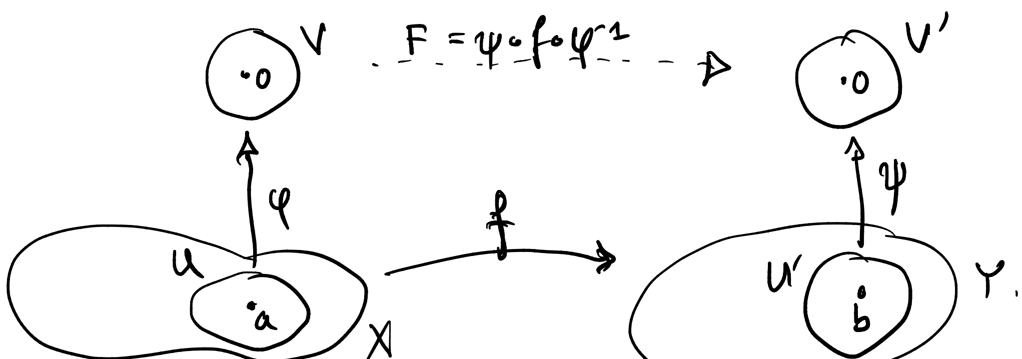
„bei a konstant" $\equiv$ konstant auf einer Umgebung von a $\overset{\text{IdSatz}}{\equiv}$ konstant auf der Zusammenhangskomp. von a.

i) $a \in U$ und $f(U) \subset U'$

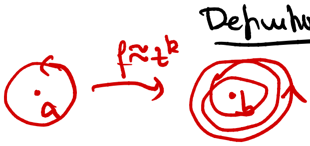
ii) $\varphi(a) = 0$ und $\psi(b) = 0$

iii) für die Abbildung $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \to V'$ gilt

$$F(z) = z^k \quad \text{für alle } z \in V.$$



Definition. Die Zahl $k \geq 1$ heißt die Windungszahl oder die Vielfachheit von f im Punkt a, und wird mit $v(f,a)$ bezeichnet.



Wenn f konstant bei a ist, ihre Windungszahl ist $v(f,a) = +\infty$.

Beweis. Erst kann man Karten φ, ψ auswählen, so daß i) und ii) erfüllt sind.

Dann hat $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ eine Potenzreihenentwicklung

$$F(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{mit } a_k \neq 0,\ k \geq 1 \quad (\text{weil } F(0) = 0)$$

$$= z^k \cdot g(z)$$

wobei $g: V \to V'$ holomorph ist, und $g(0) \neq 0$.

Nach Verkleinerung von V, kann man eine k-te Wurzel aus g ziehen: es gibt $h \in \mathcal{O}(V)$ mit $h^k = g$.

Sei $\chi(z) = z \cdot h(z)$, so daß $F(z) = \chi(z)^k$. Da $\chi'(0) = h(0) \neq 0$, dürfen wir annehmen, daß $\chi: V \to \chi(V)$ biholomorph ist.

Wir ersetzen nun die Karte $\varphi : U \to V$ durch die Karte $\chi \circ \varphi : U \to \chi(V)$

Dann gilt $(\psi \circ f \circ (\chi \circ \varphi)^{-1})(z) = z^k$.

k ist eindeutig: es gibt Umgebungen U und U' von a und b, so daß für jeden Punkt $y \in U' \setminus \{b\}$, die Menge $f^{-1}(y) \cap U$ genau k Elemente hat.

k ist dadurch bestimmt. $\square$

Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Für z in einer Umgebung von $a \in U$:

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{mit } k \geq 1 \text{ und } c_k \neq 0.$$

Nach dem Beweis der lokalen Gestalt, ist

$$v(f,a) = k = \text{Ordnung der Nullstelle } a \text{ von } f - f(a).$$

Definition Sei X eine Riemannsche Fläche, $f \in \mathcal{M}(X)$, $x \in X$.

Wir betrachten f als hol. Funktion $f : X \to \mathbb{P}^1$.

Die Ordnung von f in x ist

$$\operatorname{ord}_x(f) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x) \neq 0, \infty \\ v(f,x) & \text{falls } f(x) = 0 \\ -v(f,x) & \text{falls } f(x) = \infty \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{ord}_x : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

Bemerkung Sei $f = \sum_n a_n z^n$ eine Laurentreihenentwicklung von $f \in \mathcal{M}(X)$ um $x \in X$ (mit einer gewählten Karte z mit $z(x) = 0$).

Dann $\operatorname{ord}_x(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$

Korollar (Offenheit und Diskretheit holomorpher Abbildungen)
Sei $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen R.F., die nirgends konstant ist. Dann:

- f ist offen, d.h. $f(U)$ ist offen für jede offene Teilmenge U von X
- Außerdem sind alle Fasern $f^{-1}(y)$ diskret.

Beweis. Nach dem Satz, sieht f wie $z \mapsto z^k$ aus und $z \mapsto z^k$ ist offen.

Die Fasern sind diskret, nach dem Identitätssatz. $\square$

Korollar Jede bijektive holomorphe Abbildung ist ein Biholomorphismus.

Korollar (Maximumsprinzip) Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{O}(X)$ nirgends konstant. Dann hat die Menge $\{ |f(x)| : x \in X \}$ kein Maximum.

Beweis. f ist offen und $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist offen. $\square$

Korollar Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, so ist jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ lokal konstant.

Beweis. $|f(X)|$ ist kompakt $\Rightarrow$ hat ein Maximum. $\square$

Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist ein Quotient zweier Polynome:
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit } p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z], \ q(z) \neq 0.$$

Rationale Funktionen bilden einen Körper $\mathbb{C}(z)$, der Quotientenkörper von $\mathbb{C}[z]$.

Jede $f(z) \in \mathbb{C}(z)$ liefert eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$:
sei $N(q) = \{ z \in \mathbb{C} : q(z) = 0 \}$ endliche Menge

Dann ist $f: \mathbb{C} \setminus N(q) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph
$$\underset{\mathbb{P}^1 \setminus (N(q) \cup \{\infty\})}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{C} \setminus N(q)}} \quad \rightsquigarrow \quad f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1).$$

Satz Diese Konstruktion liefert einen Isomorphismus von Körpern
$$\mathbb{C}(z) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) .$$

Beweis. • $\mathbb{C}(z) \to \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ ist injektiv; weil sie ein Körperhomomorphismus ist.
• Surjektivität: Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$
$$f: \mathbb{P}^1 - P \longrightarrow \mathbb{C}$$
P lokal endlich und $\mathbb{P}^1$ ist kompakt $\Rightarrow$ P ist endlich.

Es genügt zu zeigen, entweder f oder $1/f$ eine rationale Funktion ist. Deswegen können wir annehmen, daß ∞ keine Polstelle von f ist.
$$\Rightarrow \quad P = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$$
Um jeden a_i kann man f in eine Laurentreihe entwickeln:
$$f(z) = \sum_{k=-j_i}^{\infty} c_{ik}(z-a_i)^k \quad \text{in einer Umgebung von } a_i$$
Sei $h_i(z) = \sum_{k=-j_i}^{-1} c_{ik}(z-a_i)^k$ die Hauptteile von f in a_i

Dann hat $f-(h_1+\dots+h_n)$ keine Polstellen auf $\mathbb{P}^1$
$\Rightarrow$ sie ist konstant, d.h. $f = h_1+\dots+h_n + \text{konstant}$ $\square$.

<u>Satz von Liouville</u>. Jede beschränkte holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis. Wir betrachten f als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$.
Da f beschränkt ist, ist ∞ keine Polstelle von f
$\Rightarrow$ $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ f ist konstant $\square$

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u> Jedes nicht-konstante Polynom $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ hat wenigstens eine Nullstelle.

Beweis. f läßt sich als holomorphe Abbildung $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $f(\infty)=\infty$ fortsetzen.
Da f nicht konstant ist, ist f offen. Außerdem ist $f(\mathbb{P}^1)$ kompakt, daher abgeschlossen in $\mathbb{P}^1$. $f(\mathbb{P}^1)$ ist offen, abgeschlossen, und nicht leer
$\Rightarrow$ f ist surjektiv. Insbesondere $0 \in f(\mathbb{P}^1)$. $\square$

Kapitel 2: Überlagerungen und Verzweigung.

<u>Definition</u> Seien X, Y topologische Räume (oder Riemannsche Flächen). Eine Abbildung $p: Y \longrightarrow X$ heißt <u>lokaler Homöomorphismus</u> (oder <u>lokaler Biholomorphismus</u>), falls jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, die durch p homöomorph (oder biholomorph) auf eine offene Teilmenge von X abgebildet wird.

<u>Definition</u>. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p: Y \longrightarrow X$ heißt <u>Überlagerung</u>, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so daß

$$p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i$$

wobei:
- die V_i sind disjunkte offene Teilmengen von Y sind
- die Abbildungen $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ Homöomorphismen sind.

Wenn alle Fasern $p^{-1}(x)$ gleichmächtig sind, heißt die Mächtigkeit der Fasern die <u>Blätterzahl</u> der Überlagerungen.

<u>Bemerkung</u>: Überlagerung $\Longrightarrow$ lokaler Homöomorphismus.

<u>Definition</u> Sei $p: Y \to X$ eine holomorphe Abbildung zwischen R.F.
Ein Punkt $y \in Y$ heißt <u>Verzweigungspunkt</u> von p, falls $v(p, y) \geq 2$.
Das Bild eines Verzweigungspunktes heißt <u>kritischer Wert</u> von p.
Die Abbildung heißt <u>unverzweigt</u>, falls sie keinen Verzweigungspunkt besitzt, d.h. $v(p, y) = 1$ für alle $y \in Y$.

Bemerkung • $v(p,y)=1 \Rightarrow v(p,y')=1$ für alle y' in einer Umgebung von y

• $v(p,y)=+\infty \Rightarrow v(p,y')=+\infty$ ———————

• $v(p,y)=k\neq 1,\infty \Rightarrow$ es gibt eine Umgebung V von y mit $v(p,y')=1$ für alle $y'\in V-\{y\}$.

Insbesondere: • der Verzweigungsort $\{y\in Y : v(p,y)\geq 2\}$ ist abgeschlossen

• falls p nirgends konstant ist, dann ist außerdem der Verzweigungsort diskret, also lokal endlich.

Satz. Sei $p: Y\longrightarrow X$ eine holomorphe Abbildung zwischen RF. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) p ist unverzweigt, d.h. $v(p,y)=1$ $\forall y\in Y$.

2) p ist lokal injektiv, d.h. jeder Punkt $y\in Y$ hat eine Umgebung V mit $p|_V$ injektiv.

3) p ist ein lokaler Homöomorphismus.

4) p ist ein lokaler Biholomorphismus.

Beweis. $4)\Rightarrow 3)\Rightarrow 2)$ sind klar.

$2)\Rightarrow 1)\Rightarrow 4)$: Diese Implikationen folgen aus der lokalen Gestalt holomorpher Abbildungen:

$v(p,y)=k \Longleftrightarrow \exists$ Karten φ,ψ mit $(\psi\circ p\circ\varphi^{-1})(z)=z^k$ (nach Definition)

$v(p,y)=1 \Rightarrow \exists$ eine offene Umgebung V von y, so dass $p|_V: V\longrightarrow p(V)$ biholomorph ist.

Umgekehrt, $v(p,y)\geq 2 \Rightarrow p$ ist in keiner Umgebung von y injektiv. $\square$

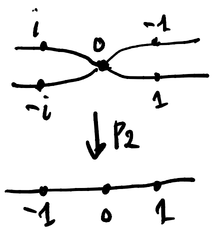
Beispiele

- Die Inklusion $U \hookrightarrow X$ einer offenen Teilmenge ist ein lokaler Homöomorphismus.

  Sie ist eine Überlagerung $\Longleftrightarrow$ U ist auch abgeschlossen

- $p_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$

  Die einzige Verzweigungspunkt ist $0 \in \mathbb{C}$



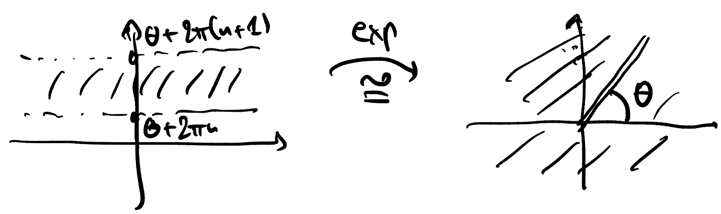
$$\begin{tikzcd} p_2^{-1}(\mathbb{R}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{C} \arrow[d, "p_2"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, hook] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$p_k|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ist unverzweigt.

und $p_k|_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ist eine Überlagerung mit k Blättern.

- $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ist eine Überlagerung: für jedes $\theta \in \mathbb{R}$

$$\exp^{-1}\left(\mathbb{C}^* \setminus \{\lambda e^{i\theta} : \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}\right) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \left(\mathbb{R} \times (\theta + 2\pi n, \theta + 2\pi(n+1))i\right)$$



- Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Die Projektion

$$\pi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma \quad \text{ist eine Überlagerung.}$$

$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$,

$$Q_z = \{ z + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda, \mu \in (0,1) \}$$

Dann $\mathbb{C}/\Gamma = \bigcup_{z \in \mathbb{C}} \pi(Q_z)$ offene Überdeckung

$$\pi^{-1}(\pi(Q_z)) = \coprod_{\omega \in \Gamma} (Q_z + \omega) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Warnung In Forster:

- „Überlagerungen" sind offene stetige Abbildungen mit diskreten Fasern
- „unverzweigte Überlagerungen" sind lokale Homöomorphismen
- „unbegrenzte, unverzweigte Überlagerungen" sind Überlagerungen.

Definition. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ heißt *eigentlich*, falls sie abgeschlossen ist und jede Faser $f^{-1}(x)$ kompakt ist.

Bmk: f ist eigentlich $\iff$ f universell abgeschlossen (d.h. für jede $Z \to X$, die Projektion $Z \times_X Y \to Z$ ist abgeschlossen)

Satz. 1) X ist kompakt $\iff$ $X \to *$ ist eigentlich

2) Ist Y kompakt und X Hausdorffsch, so ist jede stetige Abbildung $f: Y \to X$ eigentlich

Beweis. 1) ist klar.

2) • $F \subset Y$ abgeschlossen $\xRightarrow{Y \text{ kompakt}}$ F ist kompakt $\xRightarrow{f \text{ stetig}}$ $f(F)$ ist kompakt $\xRightarrow{X \text{ Hausdorff}}$ $f(F)$ ist abgeschlossen.

• $\{x\} \subset X$ ist abgeschlossen $\Longrightarrow$ $f^{-1}(x)$ ist abgeschlossen in Y $\xRightarrow{Y \text{ kompakt}}$ $f^{-1}(x)$ ist kompakt. $\square$

Satz. Sei $f: Y \to X$ eine stetige Abbildung.

1) Ist f eigentlich, so ist $f^{-1}(K)$ kompakt für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$.

2) Die Umkehrung gilt, falls X lokalkompakt und Hausdorffsch ist.

Beweis. 1) Sei $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von Y, die $f^{-1}(K)$ überdeckt. Für jeden $x \in K$, $\exists$ eine endliche Teilmenge $I_x \subset I$, so daß $f^{-1}(x) \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i$.

Sei $Z_x = Y \setminus \bigcup_{i \in I_x} U_i$ und $V_x = X \setminus f(Z_x)$

f abgeschlossen $\Longrightarrow$ V_x ist offen

Außerdem, $x \in V_x$, weil $f^{-1}(x) \cap Z_x = \emptyset$.

$\Longrightarrow K \subset \bigcup_{x \in K} V_x \Longrightarrow \exists\ x_1, \dots, x_n \in K$, so daß $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$.

$$\Longrightarrow f^{-1}(K) \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i \in I_{x_j}}}_{\text{endlich.}} U_i$$

2) Sei $F \subset Y$ abgeschlossen.

X lokalkompakt und Hausdorffsch $\Longrightarrow$ es genügt zu zeigen, daß $f(F) \cap K$ kompakt ist für jede kompakte Menge $K \subset X$.

Nach Voraussetzung, $f^{-1}(K)$ ist kompakt

$\Longrightarrow F \cap f^{-1}(K)$ ist kompakt $\Longrightarrow$ $f(F) \cap K = f(F \cap f^{-1}(K))$ ist kompakt. $\square$

Lemma. Sei $p: Y \to X$ abgeschlossen, $x \in X$, und V eine Umgebung der Faser $p^{-1}(x)$. Dann existiert eine Umgebung U von x mit $p^{-1}(U) \subset V$.

Beweis. Sei $A = Y \setminus \mathring{V}$. Dann: $p(A)$ ist abgeschlossen und $X \setminus p(A)$ ist eine Umgebung von x mit der gewünschten Eigenschaft. $\square$

Satz. 1) Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern. Dann ist p eigentlich.

2) Sei Y ein Hausdorff-Raum und $p: Y \to X$ ein eigentlicher lokaler Homöomorphismus.
Dann ist p eine Überlagerung (mit endlichen Fasern).

Beweis. 1) Sei $U \subset X$ offen so daß $p^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^{n} V_i$
mit $p|_{V_i}: V_i \xrightarrow{\cong} U$.

Sei $Z \subset Y$ abgeschlossen. Dann

$$p(Z) \cap U = p(Z \cap p^{-1}(U)) = \bigcup_{i=1}^{n} p(Z \cap V_i)$$

ist abgeschlossen in U.

Solche offene Teilmenge U überdecken $X \Longrightarrow p(Z)$ abgeschlossen in X.

2) Die Fasern sind kompakt und diskret $\Rightarrow$ endlich.

Sei $x \in X$ und $p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}$

Jede y_i hat eine Umgebung V_i, so daß $p|_{V_i}: V_i \to p(V_i)$ ein Homöomorphismus ist.

Da Y Hausdorffsch ist, können wir annehmen, daß die V_i disjunkt sind. Nach dem Lemma, gibt es eine Umgebung U von x mit

$$p^{-1}(U) \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \qquad U \subset p(V_1) \cap \dots \cap p(V_n).$$

Sei $W_i = p^{-1}(U) \cap V_i \subset V_i$.

Dann $p^{-1}(U) = \coprod_{i=1}^{n} W_i$ und

$p|_{W_i}: W_i \longrightarrow p(W_i)$ ist ein Homöomorphismus

Außerdem $p(W_i) = p(p^{-1}(U) \cap V_i) = U \cap p(V_i) = U$. $\square$

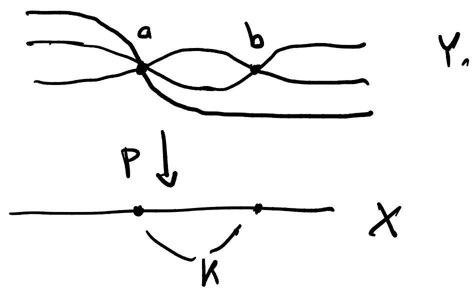
Korollar. Jede unverzweigte holomorphe Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen ist eine endliche Überlagerung.

Satz Sei $p: Y \to X$ eine nirgends-konstante eigentliche holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Dann die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \underbrace{\sum_{y \in p^{-1}(x)} v(p,y)}_{\text{die Mächtigkeit von } p^{-1}(x) \text{ „mit Vielfachheit gerechnet"}} \end{aligned}$$

ist lokal konstant.

Außerdem ist die Menge der kritischen Werte $K = \{p(y) : v(p,y) \geq 2\} \subset X$ lokal endlich, und $p: Y \setminus p^{-1}(K) \longrightarrow X \setminus K$ ist eine Überlagerung.



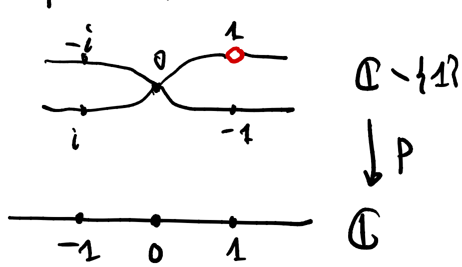
$v(p,a) = 3$
$v(p,b) = 2$
$v(p,y) = 1 \quad y \neq a,b$

Definition Eine solche Abbildung p heißt endliche verzweigte Überlagerung.

Bemerkung. Eine verzweigte Überlagerung ist nicht unbedingt eine Überlagerung. Sondern, jede endliche Überlagerung ist insbesondere eine endliche verzweigte Überlagerung.

Beispiele.

- $\mathbb{C} \setminus \{1\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ ist nicht eigentlich (z.B. $p(\overline{B(1,1)} \setminus \{1\}) \subset \mathbb{C}$ ist nicht abgeschlossen)



- Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht-konstantes Polynom.
  Die Abbildung $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung (Übung 3.2).
  Die Verzweigungspunkte von p sind die Nullstellen der Ableitung $p'(z)$,
  weil $v(p, a) =$ Ordnung von $p - p(a)$ im Punkt a
  $= ($Ordnung von p' im Punkt $a) + 1$
  $\Longrightarrow$ p ist eine Überlagerung über $\mathbb{C} \setminus \{p(a) : p'(a) = 0\}$

Beweis. • p nirgends konstant ist $\Longrightarrow$ der Verzweigungsort ist lokal endlich
$\underset{p \text{ eigentlich}}{\Longrightarrow}$ K ist lokal endlich
(weil: für $C \subset X$ kompakt $\Rightarrow$ $C \cap K = p(\underbrace{\overbrace{p^{-1}(C)}^{\text{kompakt}} \cap \text{V.O.}}_{\text{endlich}})$ endlich)

- $Y \setminus p^{-1}(K) \xrightarrow{p} X \setminus K$ ist eigentlich und unverzweigt
  $\Longrightarrow$ eine Überlagerung mit endlichen Fasern.
- Wir dürfen annehmen, daß X zusammenhängend ist.

  Dann ist $X \setminus K$ auch zusammenhängend
  $\Rightarrow$ also p über $X \setminus K$ hat eine Blätterzahl $n \in \mathbb{N}$.

  <u>Behauptung</u> $\sum_{y \in p^{-1}(x)} v(p, y) = n$ für alle $x \in X$.

  $p \approx z^{v(p,y)}$ in einer Umgebung von $y \in p^{-1}(x)$
  $\Rightarrow$ Es gibt Umgebungen U_y von x und V_y von y, so daß für jede $x' \in U_y \setminus \{x\}$, $p^{-1}(x') \cap V_y$ hat genau $v(p, y)$ Elemente.
  Wir nehmen an, daß $V_y \cap V_{y'} = \emptyset$ für verschiedene $y, y' \in p^{-1}(x)$

  Nach dem Lemma, gibt es eine Umgebung $U \subset \bigcap_{y \in p^{-1}(x)} U_y$ von x so daß $p^{-1}(U) \subset \coprod_{y \in p^{-1}(x)} V_y$.

Für jeden $x' \in U \setminus \{x\}$, gilt

$$p^{-1}(x') = \coprod_{y \in p^{-1}(x)} (p^{-1}(x') \cap V_y)$$

$$\Rightarrow \quad n = \# p^{-1}(x') = \sum_{y \in p^{-1}(x)} \#(p^{-1}(x') \cap V_y) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} v(p,y). \quad \square$$

<u>Korollar</u> Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$ nirgends-konstant. Dann

$$\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) = 0$$

Anders gesagt: f hat ebenso viele Nullstellen wie Polstellen (mit Vielfachheit gerechnet).

Beweis. $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eigentlich, $\mathbb{P}^1$ zusammenhängend

$\Rightarrow$ alle Fasern sind gleichmächtig:

$$\sum_{x \in f^{-1}(0)} \underbrace{v(p,x)}_{\mathrm{ord}_x(f)} = \sum_{x \in f^{-1}(\infty)} \underbrace{v(p,x)}_{-\mathrm{ord}_x(f)} \quad \text{und } \mathrm{ord}_x(f) = 0 \text{ falls } f(x) \neq 0, \infty \quad \square.$$

<u>Beispiel.</u> $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}(z)$ $\quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit p, q ohne gemeinsame Teiler

$$\sum_{x \in f^{-1}(0) \cap \mathbb{C}} \mathrm{ord}_x(f) = \deg p(z) \qquad \sum_{x \in f^{-1}(\infty) \cap \mathbb{C}} \mathrm{ord}_x(f) = -\deg q(z)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{ord}_\infty(f) = \deg q(z) - \deg p(z).$$

Abbildungen zwischen Überlagerungen

Definition Seien

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

stetige Abbildungen. Eine Liftung (oder Hochhebung) von f bzgl. p ist eine stetige Abbildung $g: Z \longrightarrow Y$, so daß $f = p \circ g$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & X \end{tikzcd}$$

Lemma Sei $p: Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, und $f: Z \longrightarrow X$ eine beliebige holomorphe Abbildung.

Dann ist jede Liftung von f bzgl. p holomorph.

Beweis. Sei $g: Z \longrightarrow Y$ eine Liftung.

Sei $z \in Z$, $y = g(z) \in Y$, $x = f(z) = p(y) \in X$.

Da p unverzweigt ist, gibt es offene Umgebungen V von y und U von x, so daß $p|_V : V \longrightarrow U$ biholomorph ist.

Sei $\varphi: U \longrightarrow V$ die Umkehrabbildung.

g stetig $\Longrightarrow$ $\exists$ offene Umgebung W von z mit $g(W) \subset V$

Dann $g|_W = \varphi \circ f|_W$, also g ist holomorph im Punkt z. $\square$

Satz. Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

1) Seien $p: Y \to X$ und $q: Z \to X$ unverzweigte holomorphe Abbildungen. Jede stetige Abbildung $f: Y \to Z$ über X $(p = q \circ f)$ ist holomorph.

2) Seien $p: Y \to X$ und $q: Z \to X$ endliche verzweigte Überlagerungen. Jede stetige Abbildung $f: Y \to Z$ über X ist holomorph.

Beweis. 1) Das folgt aus dem Lemma, weil f eine Liftung von p bzgl. q ist.

2). Sei $K \subset X$ die Menge der kritischen Werte von p und q.

$p|_{Y \setminus p^{-1}(K)}$ und $q|_{Z \setminus q^{-1}(K)}$ sind unverzweigt

$\underset{\text{nach 1)}}{\Longrightarrow}$ $f|_{Y \setminus p^{-1}(K)}$ holomorph.

Da K lokal endlich ist, ist $p^{-1}(K)$ auch lokal endlich.

f stetig ist $\Longrightarrow$ die Punkte $y \in p^{-1}(K)$ sind hebbare Singularitäten von f.

($f: U \to \mathbb{C}$ stetig & $f|_{U - \{y\}}$ holomorph $\Longrightarrow$ f ist auf U holomorph.) $\square$.

Kapitel 3. Die Fundamentalgruppe

__Überblick:__ Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche.
Die Fundamentalgruppe von X ist eine Gruppe $\pi_1(X)$, so daß:

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{z.h. Überlagerungen } Y \to X\} & \longleftrightarrow & \{\text{Untergruppen } H \subset \pi_1(X)\} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{endliche Überlagerungen}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Untergruppen mit } [\pi_1(X):H] < \infty\} \\
\cap & & \updownarrow \\
\{\text{end. verzweigte Überlagerungen } Y \to X\} & & \{\text{Untergruppen von } \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \text{ von endlichem Index}\} \\
 & \searrow\!\!\nwarrow & \updownarrow \text{ Galoistheorie} \\
K = \mathcal{M}(X) & & \{\text{end. Körpererweiterungen } L/K\}
\end{array}
$$

$\rightsquigarrow$ es gibt einen kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$
\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \twoheadrightarrow \pi_1(X)^\wedge = \lim_{[\pi_1(X):N]<\infty} \pi_1(X)/N
$$

pro-endliche Vervollständigung

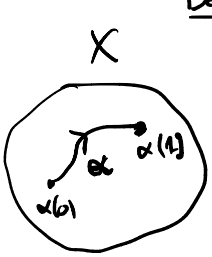
$$
\pi_1(X) \to \pi_1(X)^\wedge
$$

Er induziert einen Isomorphismus

$$
\pi_1(X)^\wedge \cong \mathrm{Gal}(M/K)
$$

wobei M/K die „maximale in X unverzweigte" Erweiterung von K ist.

__Definition__ Sei X ein topologischer Raum.



- Ein __Weg__ (oder eine __Kurve__) in X ist eine stetige Abbildung
  $$\alpha: I = [0,1] \longrightarrow X.$$
- X heißt __wegzusammenhängend__, falls $X \neq \emptyset$ und je zwei Punkte in X durch einen Weg verbunden werden können.
- X heißt _lokal wegzusammenhängend_, falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus weg.z.h. offenen Mengen besitzt.

Bemerkung.

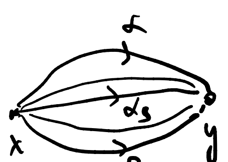
- wegzusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend
  (falls $X = U \amalg V$, gibt es keinen Weg von $x \in U$ nach $y \in V$)

- lokal weg.z.h + z.h $\Rightarrow$ weg.z.h.

- $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal weg.z.h.

Definition. Eine Schleife am Punkt $x \in X$ ist ein Weg $\alpha : I \to X$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x$.

Definition. Sei $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege von x nach y.
α und β heißen homotop, falls es eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:



$\alpha_s = H(-, s)$

- $H(t, 0) = \alpha(t)$ für alle $t \in I$
- $H(t, 1) = \beta(t)$ für alle $t \in I$
- $H(0, s) = x$ für alle $s \in I$
- $H(1, s) = y$ für alle $s \in I$

- Eine solche Abbildung H heißt Homotopie von α nach β
- Eine Schleife heißt nullhomotop, wenn sie zu der konstanten Schleife homotop ist.

Notation: $\alpha \sim \beta$ falls α und β homotop sind.

Satz Sei X ein topologischer Raum, $x, y \in X$. Dann $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf die Menge aller Wege von x nach y.

Beweis zur Transitivität: H Homotopie von α nach β
J ——— β und γ

Man definiert $K : I \times I \to X$

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} H(t, 2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ J(t, 2s-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dann K ist stetig und ist eine Homotopie von α nach γ. $\square$

Notation. Die Homotopieklasse von α wird mit $[\alpha]$ bezeichnet.

Lemma (Unabhängigkeit der Parametrisierung)

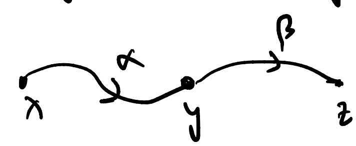
Sei $\varphi: I \to I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0)=0$ und $\varphi(1)=1$.
Ist $\alpha: I \to X$ ein Weg, so ist $[\alpha] = [\alpha \circ \varphi]$.

Beweis. Man definiert $H: I \times I \to I$ $\quad H(t,s) = (1-s)\cdot t + s\cdot\varphi(t)$

Denn:
$$H(t,0) = t, \qquad H(t,1) = \varphi(t)$$
$$H(0,s) = 0, \qquad H(1,s) = 1-s+s = 1$$

$\Longrightarrow$ $\alpha \circ H: I \times I \to X$ ist eine Homotopie zwischen α und $\alpha\circ\varphi$. $\square$

Definition. Sei α ein Weg von x nach y, β ein Weg von y nach z.



- Die Zusammensetzung (oder Verknüpfung) von α und β ist:

$$\alpha\beta: I \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

- Der inverse Weg von α ist $\bar{\alpha}: I \to X$, $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.
- Der konstante Weg im Punkt x ist $c_x: I \to X$, $c_x(t) = x$.

Satz. Es seien Wege α, α' von x nach y, β, β' von y nach z, γ von z nach w.

1) $\alpha \sim \alpha'$ und $\beta \sim \beta'$ $\Longrightarrow$ $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$
2) (Assoziativität) $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$
3) (neutrales Element) $\alpha c_y \sim \alpha$ und $c_x\alpha \sim \alpha$
4) (inverse Elemente) $\alpha\bar{\alpha} \sim c_x$ und $\bar{\alpha}\alpha \sim c_y$

Korollar/Definition. Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ ein Basispunkt.

Sei $\pi_1(X,x) := \{\text{Schleifen an } x\}/\sim$

Dann ist die Verknüpfung
$$\pi_1(X,x) \times \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$$
$$([\alpha],[\beta]) \longmapsto [\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$$
wohldefiniert und macht $\pi_1(X,x)$ zu einer Gruppe, der <u>Fundamentalgruppe</u> von X mit Basispunkt x.
Das neutrale Element ist $[c_x]$ und $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$.

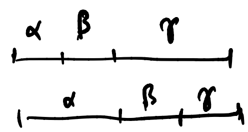
Beweis.

1) Sei $H: I \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von α nach α'
γ ——— β nach β'

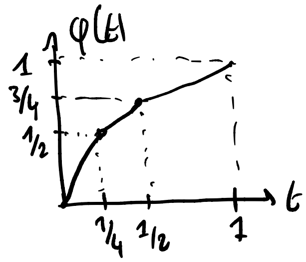
Dann $K: I \times I \longrightarrow X$
$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} H(2t,s) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1,s) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow K$ ist eine Homotopie von $\alpha\beta$ nach $\alpha'\beta'$.

2) $(\alpha\beta)\gamma$:
$\alpha(\beta\gamma)$:



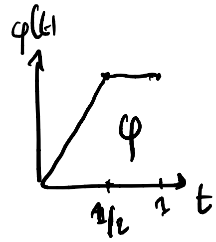
$\varphi: I \longrightarrow I$.



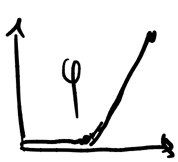
$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \le t \le 1/4 \\ t + \frac{1}{4} & \text{für } 1/4 \le t \le 1/2 \\ (t+1)/2 & \text{für } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

$\alpha(\beta\gamma) \circ \varphi = (\alpha\beta)\gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\beta\gamma) \sim (\alpha\beta)\gamma$ nach dem Lemma.

3)



$\rightsquigarrow \quad \alpha \circ \varphi = \alpha c_y \quad \Longrightarrow \quad \alpha \sim \alpha c_y.$



$\rightsquigarrow \quad \alpha \sim c_x \alpha.$

4) $$(\alpha\bar{\alpha})(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \bar{\alpha}(2t-1) = \alpha(2-2t) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

$$H: I \times I \longrightarrow X$$

$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} \alpha(2ts) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha((2-2t)s) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

($H(-,s)$ läuft von $\alpha(0)$ bis $\alpha(s)$ und dann zurück)

ist ein Homotopie zwischen c_x $(s=0)$ und $\alpha\bar{\alpha}$ $(s=1)$.

$\bar{\alpha}\alpha = \bar{\alpha}\bar{\bar{\alpha}} \sim c_y$, $\square$.

<u>Funktorielles Verhalten</u>. Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung.

Falls $\alpha, \beta: I \longrightarrow X$ durch H homotop sind, dann sind $f\circ\alpha$ und $f\circ\beta$ durch $f\circ H$ homotop.

$\Rightarrow$ Die Abbildung

$$f_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$$
$$[\alpha] \longmapsto [f\circ\alpha]$$

ist wohldefiniert und auch ein Gruppenhomomorphismus

(weil $f\circ(\alpha\beta) = (f\circ\alpha)(f\circ\beta)$)

Außerdem: $\quad Id_* = Id$

$$(f\circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Also, π_1 ist ein Funktor $\{$punktierte topologische Räume$\} \longrightarrow$ Gruppen.

Abhängigkeit vom Basispunkt

Sei $\gamma : I \to X$ ein Weg von x nach y. Dann ist

$$\gamma_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,y)$$
$$[\alpha] \longmapsto [\bar{\gamma}\alpha\gamma]$$

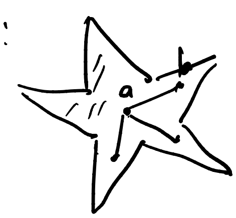
ein Gruppenisomorphismus, mit $(\gamma_*)^{-1} = \bar{\gamma}_*$

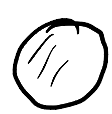
$\Rightarrow$ Falls X wegzusammenhängend ist, ist $\pi_1(X,x)$ unabhängig von x bis auf Isomorphie.

Deshalb kann man nur $\pi_1(X)$ schreiben, wenn nur die Isomorphieklasse von $\pi_1(X,x)$ relevant ist.

Definition. Ein topologischer Raum X heißt einfach (weg)zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X)$ trivial ist.

Beispiele. • Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn sie einen Punkt a enthält, so daß für jeden anderen Punkt $b \in X$ die ganze Strecke $[a,b] = \{ta + (1-t)b : 0 \le t \le 1\}$ in X enthalten ist.

(z.B.: 

,  , $\mathbb{R}^n$, ...)

Eine solche X ist einfach zusammenhängend:

Für eine Schleife α am Punkt a,

$$H : I \times I \longrightarrow X$$
$$(t,s) \longmapsto sa + (1-s)\alpha(t) \in [a, \alpha(t)]$$

ist eine Homotopie zwischen α und c_a.

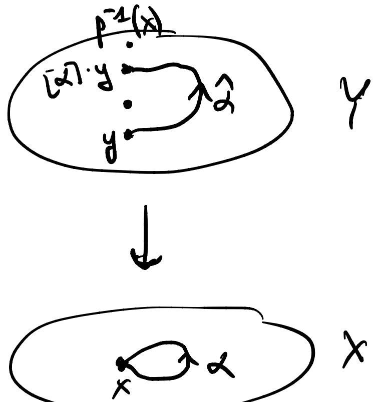
$\Rightarrow \pi_1(X,a) = 0.$

• $\mathbb{P}^1$ ist einfach zusammenhängend. (Übung 4.2)

Monodromieoperation

Sei $p : Y \longrightarrow X$ ein Überlagerung, und $x \in X$.

Das Ziel ist, eine Gruppenoperation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf der Faser $p^{-1}(x)$ zu definieren, durch Weglifting:



Satz (Eindeutigkeit der Liftung)

Sei Y ein Hausdorff-Raum und $p: Y \longrightarrow X$ ein lokaler Homöomorphismus. Sei Z ein zusammenhängender Raum und $f: Z \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}
$$

Sind $g_1, g_2 : Z \longrightarrow Y$ zwei Liftungen von f bzgl. p, die in einem Punkt z_0 übereinstimmen, so ist $g_1 = g_2$.

Beweis. Sei $T = \{ z \in Z : g_1(z) = g_2(z) \} \subset Z$.

Y Hausdorffsch $\Rightarrow$ T ist abgeschlossen in Z

$$(T = (g_1, g_2)^{-1}(\Delta_Y \subset Y \times Y))$$

$T \neq \emptyset$ nach Voraussetzung. Es bleibt zu zeigen, daß T offen ist.

Sei $z \in T$, $y = g_1(z) = g_2(z)$, $x = f(z) = p(y)$. Es gibt offene Umgebungen V von y und U um x, so daß $p|_V : V \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus ist.

g_1, g_2 sind stetig $\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung W von z mit $g_1(W) \subset V$ $g_2(W) \subset V$.

Denn $g_i|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$ für $i = 1, 2$ $\Rightarrow$ $W \subset T$. $\square$

Bemerkungen

- Wenn $p: Y \to X$ eine Überlagerung ist, gilt die Aussage selbst wenn Y nicht Hausdorffsch ist.
- Aber für lokale Homöomorphismen ist die Hausdorffsch-Voraussetzung notwendig:

z.B.
$$\begin{array}{c} Y = \text{„}\mathbb{R} \text{ mit doppeltem Nullpunkt"} \\ \downarrow \\ \mathbb{R} \end{array}$$

$[0,1] \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$ hat zwei Liftungen $\hat{\alpha}$ mit $\hat{\alpha}(1) = 1$.

Satz (Existenz von Wegliftungen)

Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung und $\alpha: I \to X$ ein Weg, $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = \alpha(0)$. Dann existiert eine Liftung $\hat{\alpha}: I \to Y$ von α mit $\hat{\alpha}(0) = y_0$.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von I, gibt es eine Unterteilung
$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$
und offene Teilmengen $U_1, \dots, U_n \subset X$ so daß,

i) $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$

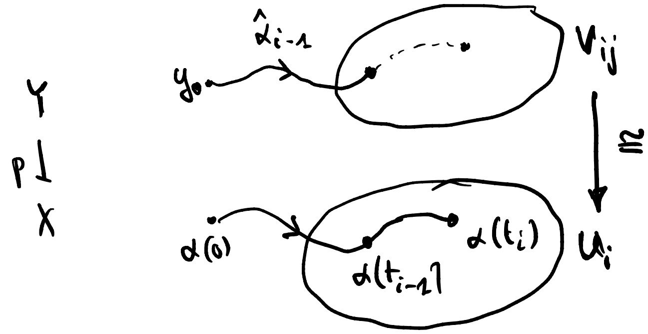
ii) $p^{-1}(U_i) = \coprod_{j \in J_i} V_{ij}$ mit $p|_{V_{ij}}: V_{ij} \xrightarrow{\cong} U_i$.

Man definiert $\hat{\alpha}_i: [0, t_i] \to Y$ eine Liftung von $\alpha|_{[0,t_i]}$ mit $\hat{\alpha}_i(0) = y_0$ durch Induktion:

- $i = 0$: $\hat{\alpha}_0: \{0\} \to Y$, $\hat{\alpha}_0(0) = y_0$
- $i > 0$: wir nehmen an, daß $\hat{\alpha}_{i-1}: [0, t_{i-1}] \to Y$ schon konstruiert wird.

Dann $\hat{\alpha}_{i-1}(t_{i-1}) \in p^{-1}(U_i) = \coprod_{j \in J_i} V_{ij}$

$\Rightarrow \exists!\ j \in J_i$ mit $\hat{\alpha}_{i-1}(t_{i-1}) \in V_{ij}$



Sei $\varphi : U_i \longrightarrow V_{ij}$ die Umkehrabbildung von $p|_{V_{ij}}$.

Wir definieren

$$\hat{\alpha}_i : [0, t_i] \longrightarrow Y \,, \quad t \mapsto \begin{cases} \hat{\alpha}_{i-1}(t) & \text{für } t \in [0, t_{i-1}] \\ \varphi(\alpha(t)) & \text{für } t \in [t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

Da $\hat{\alpha}_{i-1}(t_{i-1}) = \varphi(\alpha(t_{i-1}))$, ist $\hat{\alpha}_i$ stetig.

Es ist klar, daß $p \circ \hat{\alpha}_i = \alpha|_{[0, t_i]}$, wie gewünscht. $\square$

Satz (Liftung homotoper Wege)

nicht notwendig, wenn p eine Überlagerung ist

Sei Y ein Hausdorff-Raum, und $p : Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus.
Seien $a, b \in X$ und $\hat{a} \in p^{-1}(a)$.
Seien $\alpha_0, \alpha_1 : I \longrightarrow X$ zwei Wege von a nach b
und $H : I \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von α_0 bis α_1.
Wir setzen $\alpha_s(t) = H(t, s)$.

Wir setzen voraus, daß jeder α_s ein Liftung $\hat{\alpha}_s : I \to Y$ mit $\hat{\alpha}_s(0) = \hat{a}$ besitzt (z.B. p ist ein Überlagerung)

Dann haben $\hat{\alpha}_0$ und $\hat{\alpha}_1$ denselben Endpunkt und sind homotop.

Beweis. Wir definieren $\hat{H} : I \times I \longrightarrow Y$ durch $\hat{H}(t, s) = \hat{\alpha}_s(t)$.

<u>Behauptung</u> $\hat{H}$ ist stetig.
Es folgt, daß $\hat{H}(1, -) : I \longrightarrow Y$ konstant ist,
weil $\hat{H}(1, s) \in p^{-1}(b)$, und $p^{-1}(b)$ ist diskret und I zusammenhängend.
$\Longrightarrow$ $\hat{\alpha}_0$ und $\hat{\alpha}_1$ haben denselben Endpunkt und $\hat{H}$ ist eine Homotopie zwischen denen.

Es bleibt, die Behauptung zu beweisen.

- Seien V und U Umgebungen von $\hat{a}$ und a, so daß $p|_V : V \xrightarrow{\cong} U$.
  Sei $\varphi : U \to V$ die Umkehrabbildung.

$$\left.\begin{array}{l} H(\{0\}\times I) = \{a\} \\ H \text{ stetig} \\ I \text{ kompakt} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } H([0,\varepsilon]\times I) \subset U$$

Wegen der Eindeutigkeit der Liftung von $\alpha_s|_{[0,\varepsilon]}$ gilt:

$$\hat{\alpha}_s|_{[0,\varepsilon]} = \varphi \circ \alpha_s|_{[0,\varepsilon]} \quad \text{für alle } s \in I.$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}|_{[0,\varepsilon]\times I} = \varphi \circ H|_{[0,\varepsilon]\times I}$$

Insbesondere, $\hat{H}$ ist auf $[0,\varepsilon]\times I$ stetig.

- Wir beweisen durch Widerspruch, daß $\hat{H}$ auf ganz $I\times I$ stetig ist.

Angenommen, gibt es $(t_0,\sigma) \in I\times I$, in dem $\hat{H}$ nicht stetig ist.

Sei $\tau = \inf\{t \in I : \hat{H} \text{ ist in } (t,\sigma) \text{ nicht stetig}\} > 0$

Seien $y = \hat{H}(\tau,\sigma)$, $x = p(y) = H(\tau,\sigma)$.

$\hat{H}$ ist auf $[0,\varepsilon]\times I$ stetig.

Es gilt Umgebungen V von y und U von x mit $p|_V : V \xrightarrow{\cong} U$.
Sei $\varphi : U \to V$ die Umkehrabbildung.

$(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)$

H stetig $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $H(B(\tau,\varepsilon)\times B(\sigma,\varepsilon)) \subset U$

Wegen der Eindeutigkeit der Liftung gilt $\hat{\alpha}_\sigma|_{B(\tau,\varepsilon)} = \varphi \circ \alpha_\sigma|_{B(\tau,\varepsilon)}$

Sei $t_1 \in B(\tau,\varepsilon)$ mit $t_1 < \tau$. Nach Definition von τ ist $\hat{H}$ in (t_1,σ) stetig,

und $\hat{H}(t_1,\sigma) = \hat{\alpha}_\sigma(t_1) = \varphi(\alpha_\sigma(t_1)) \in V$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0,\ \delta \le \varepsilon$ mit $\hat{H}(B(t_1,\delta)\times B(\sigma,\delta)) \subset V$.

$\underset{\text{(Eindeutigkeit der Liftung)}}{\Rightarrow}$ $\hat{\alpha}_s|_{B(\tau,\varepsilon)} = \varphi \circ \alpha_s|_{B(\tau,\varepsilon)}$ für alle $s \in B(\sigma,\delta)$

weil sie im Punkt $t_1 \in B(\tau,\varepsilon)$ übereinstimmen.

das heißt: $\hat{H} = \varphi \circ H$ auf $B(\tau, \varepsilon) \times B(\sigma, \delta)$

Insbesondere ist $\hat{H}$ in einer Umgebung von (τ, σ) stetig,
aber das ist ein Widerspruch zur Definition von τ. $\square$.

<u>Korollar</u>. Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung und $x \in X$. Dann ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$$
$$(y, [\alpha]) \longmapsto \hat{\alpha}_y(1), \text{ wobei } \hat{\alpha}_y : I \to Y$$

die eindeutige Liftung von α mit $\hat{\alpha}_y(0) = y$.

Übung 4.3: diese Abbildung ist eine Gruppenoperation von $\pi_1(X, x)$ auf $p^{-1}(x)$.

<u>Beispiel</u>. $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ Überlagerung.

Sei $\alpha_n : I \to \mathbb{C}^*$, $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ $(n \in \mathbb{Z})$

α_n ist eine Schleife am Punkt $1 \in \mathbb{C}^*$.

$\exp^{-1}(1) = 2\pi i \mathbb{Z} = \{2\pi i n : n \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{\alpha}_{n,k} : I \to \mathbb{C}$, $\hat{\alpha}_{n,k}(t) = 2\pi i (k + nt)$ ist eine Liftung von α_n mit $\hat{\alpha}_{n,k}(0) = 2\pi i k$.

$$\exp^{-1}(1) \times \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \longrightarrow \exp^{-1}(1)$$
$$(2\pi i k, [\alpha_n]) \longmapsto \hat{\alpha}_{n,k}(1) = 2\pi i (k+n).$$

Insbesondere, $[\alpha_n] \neq [\alpha_m]$ falls $n \neq m$.

$\Longrightarrow$ $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ ist nicht trivial,
d.h. $\mathbb{C}^*$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Übung 4.4: $\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ ist ein Gruppenisomorphismus.
$n \longmapsto [\alpha_n]$

Satz (Liftungssatz für einfach zusammenhängende Räume)

Sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung.

Sei Z ein einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend Raum, und $f : Z \longrightarrow X$ stetig.

Zu jeder Wahl von Punkten $z_0 \in Z$ und $y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = p(y_0)$ gibt es genau eine Liftung $\hat{f} : Z \longrightarrow Y$ von f mit $\hat{f}(z_0) = y_0$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\hat{f}$ ist schon bekannt (weil Z zusammenhängend ist)

Sei $z \in Z$. Da Z weg.z.h. ist gibt es einen Weg α von z_0 nach z.

Sei $\hat{\alpha} : I \longrightarrow Y$ eine Liftung von $f \circ \alpha$ mit $\hat{\alpha}(0) = y_0$.

Behauptung: $\hat{\alpha}(1) \in Y$ ist unabhängig von α.

Seien $\alpha, \beta : I \longrightarrow Z$ zwei Wege von z_0 nach z.

Dann $[\alpha\bar{\beta}] \in \pi_1(Z, z_0) = 0$ (Z einfach z.h.)

$\Longrightarrow$ α und β sind homotop $\Longrightarrow$ $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ sind homotop

$\Longrightarrow$ $\hat{\alpha}(1) = \hat{\beta}(1)$ (nach dem vorherigen Satz)

Wir definieren $\hat{f}(z) = \hat{\alpha}(1)$.

Dann $(p \circ \hat{f})(z) = p(\hat{\alpha}(1)) = f(\alpha(1)) = f(z)$

Es bleibt zu zeigen, daß $\hat{f}$ stetig ist.

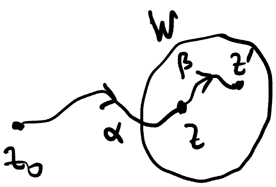
Stetigkeit von $\hat{f}$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Sei $z \in Z$ und V eine Umgebung von $\hat{f}(z)$ in Y.
Wir suchen eine Umgebung W von z mit $\hat{f}(W) \subset V$.
Wir dürfen annehmen, daß $p|_V : V \longrightarrow p(V)$ ein Homöomorphismus ist,
Sei $\varphi = (p|_V)^{-1} : p(V) \longrightarrow V$.

Z lokal weg.z.h $\Rightarrow \exists$ weg.z.h Umgebung W von z mit $f(W) \subset p(V)$.

Wir behaupten, daß $\hat{f}(W) \subset V$.



Sei $z' \in W$, $\beta : I \longrightarrow W$ ein Weg von z nach z'.

$\Rightarrow$ $\alpha\beta$ ist ein Weg von z_0 nach z'

Nach Definition von $\hat{f}$, $\hat{f}(z') = \widehat{\alpha\beta}(1)$, wobei $\widehat{\alpha\beta}$ eine Liftung von $f \circ (\alpha\beta)$ mit $\widehat{\alpha\beta}(0) = y_0$ ist.

$\hat{\alpha} \cdot (\varphi \circ f \circ \beta)$ ist eine solche Liftung.

$$\Rightarrow \quad \hat{f}(z') = (\hat{\alpha}(\varphi \circ f \circ \beta))(1) = \varphi(f(\beta(1))) = \varphi(f(z')) \in V,$$

wie behauptet. $\square$

Beispiel. Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche (z.B. $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{P}^1$). Dann hat jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ein Logarithmus, d.h. $\exists$ $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\exp \circ F = f$.

Falls f holomorph ist, dann F ist auch holomorph.

Bemerkung. Der Riemannsche Abbildungssatz sagt, daß $\mathbb{C}$, $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, und $\mathbb{P}^1$ sind die einzige einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen bis auf Biholomorphie
[Forster, Satz 27.9]

Definition Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum.

Eine Überlagerung $p: Y \to X$ heißt <u>universelle Überlagerung</u>, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

i) Y ist zusammenhängend

ii) zu jeder zusammenhängenden Überlagerung $q: Z \to X$ und jeden Punkten $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$ mit $q(z_0) = p(y_0)$ gibt es <u>genau eine</u> stetige Abbildung $f: Y \to Z$ über X mit $f(y_0) = z_0$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Falls sie existiert, eine universelle Überlagerung ist eindeutig bis auf Isomorphie:

Seien $p_1: Y_1 \to X$, $p_2: Y_2 \to X$ universelle Überlagerungen.

Da X und $Y_{1,2}$ z.h. sind, sind $p_{1,2}$ surjektiv

$\Rightarrow \exists\ y_i \in Y_i$ mit $p_1(y_1) = p_2(y_2)$

$\Rightarrow \exists !\ f: Y_1 \to Y_2$ mit $f(y_1) = y_2$
$\quad\ g: Y_2 \to Y_1 \quad\ g(y_2) = y_1$.

Dann $f \circ g = Id_{Y_2}$ und $g \circ f = Id_{Y_1}$ wegen der Eindeutigkeit in ii)

Lemma Sei X ein z.h. topologischer Raum, der lokal wegzusammenhängend ist. Sei $p: Y \to X$ eine Überlagerung.

Ist Y einfach zusammenhängend, so ist p eine universelle Überlagerung.

Beweis. X lokal weg z.h. $\Rightarrow$ Y lokal weg z.h. ist

Sei $q: Z \to X$ eine Überlagerung, $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$ mit $p(y_0) = q(z_0)$

Da Y einfach zh und lokal weg z.h ist, hat p eine eindeutige Liftung $f: Y \to Z$ bzgl. q mit $f(y_0) = z_0$, nach dem letzten Satz. $\square$

Beispiele.
- $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist eine universelle Überlagerung.
- $\exp: i\mathbb{H} \to \mathbb{D}^*$ ———
- $\pi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ ———

Satz (ohne Beweis, siehe Forster, Satz 5.3)

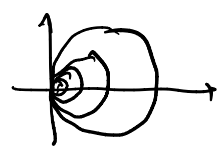
Sei X ein z.h. topologischer Raum, der lokal einfach zusammenhängend ist, d.h.: in dem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden offenen Mengen besitzt.
(z.B. X ist eine z.h. Mannigfaltigkeit)

Dann existiert eine Überlagerung $\tilde{X} \longrightarrow X$ mit $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend, insbesondere eine universelle Überlagerung.

Idee: die Punkte von $\tilde{X}$ sind Homotopieklassen von Wegen in X mit einem festen Anfangspunkt.
Man definiert eine Topologie darauf, so dass $\tilde{X} \longrightarrow X$, $[\alpha] \mapsto \alpha(1)$ eine Überlagerung ist.

Bemerkung.

- Es gibt Beispiele von z.h. Räumen, die keine universelle Überlagerungen besitzen.
  Ein typisches Beispiel ist der Hawaiische Ohrring



$$\bigcup_{n \geq 1} \partial B\left(\left(\tfrac{1}{n}, 0\right), \tfrac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}^2 .$$

- Nach Übung 1.4, jede z.h. Überlagerung Y einer Riemannschen Fläche X hat eine eindeutige Struktur von Riemannscher Fläche, so dass die Abbildung $Y \longrightarrow X$ holomorph ist.
  Insbesondere, ist die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ eine Riemannsche Fläche.
  (und außerdem, $\tilde{X} \cong \mathbb{C}, D, \mathbb{P}^1$ nach dem Riemannschen Abbildungssatz)

Definition. Sei $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung.
Eine Decktransformation von Y/X ist ein Homöomorphismus $f : Y \longrightarrow Y$ über X (d.h. $p \circ f = p$).
Die Gruppe aller Decktransformationen werden wir mit $\mathrm{Deck}(Y/X)$ bezeichnen.

Erinnerung: wenn X eine Riemannsche Fläche ist und $p: Y \to X$ eine Überlagerung oder eine endliche verzweigte Überlagerung ist, dann ist jede Decktransformation biholomorph.

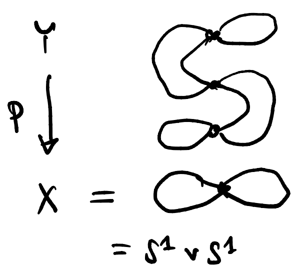
Definition: Sei X ein z.h. topologischer Raum. Eine Überlagerung $p: Y \to X$ heißt Galoisch oder normal, wenn Y z.h. ist und die Gruppe $\mathrm{Deck}(Y/X)$ auf jeder Faser transitiv operiert,

d.h. zu jeden Punkten $y_1, y_2 \in Y$ mit $p(y_1) = p(y_2)$ existiert eine Decktransformation $f: Y \to Y$ mit $f(y_1) = y_2$.

Beispiel: • $\mathbb{C}^* \xrightarrow{p_k} \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$, ist eine Galoische Überlagerung:

Seien z_1, z_2 zwei k-te Wurzeln von $w \in \mathbb{C}^*$.
Dann ist $\frac{z_2}{z_1} =: \zeta$ eine k-te Einheitswurzel
und $z \mapsto \zeta \cdot z$ ist eine Decktransformation von p_k, die z_1 auf z_2 abbildet.

•



$\mathrm{Deck}(Y/X) = \{\mathrm{Id}_Y\}$
$\Longrightarrow$ p ist nicht Galoisch.

Satz. Sei X ein z.h. und lokal weg-z.h. Raum, und $p: \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung mit $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend.
Dann ist $p: \tilde{X} \to X$ Galoisch und es gibt einen Isomorphismus

$$\pi_1(X) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X).$$

Beweis. Wir wählen feste Punkte $x_0 \in X$ und $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.
Dann werden wir einen Isomorphismus
$$\pi_1(X, x_0) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$$
definieren, der von y_0 abhängt.

- Sei $y \in p^{-1}(x_0)$. Da p universell ist, gibt es genau eine stetige Abbildung $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ über X mit $f(y_0) = y$.
  Ebenso gibt es genau eine $g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ mit $g(y) = y_0$
  Dann $g \circ f = \mathrm{Id}$ und $f \circ g = \mathrm{Id}$ $\Rightarrow$ $f \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$.
  Damit ist gezeigt, dass p Galoisch ist.

- Wir definieren Abbildungen
$$\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$
$$\Psi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$$
  wie folgt.

  Sei $\sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$.
  $\tilde{X}$ ist einfach zusammenhängend
  $\Rightarrow$ es gibt einen Weg α von y_0 nach $\sigma(y_0)$
  eindeutig bis auf Homotopie.
  Wir setzen $\Phi(\sigma) = [p \circ \alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

  Sei nun $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Wie schon gezeigt, es gibt eine eindeutige $\sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ mit $\sigma(y_0) = y_0[\alpha]$
  $= $ Endpunkt der Liftung $\hat{\alpha}$ von α mit $\hat{\alpha}(0) = y_0$.
  Wir setzen $\Psi([\alpha]) = \sigma$.

- $(\Psi \circ \Phi)(\sigma) = \Psi([p \circ \alpha])$
  $\uparrow$ von y_0 nach $\sigma(y_0)$

  $=$ die einzige σ' mit $\sigma'(y_0) = \alpha(1) = \sigma(y_0)$
  $= \sigma$

- $(\Phi \circ \Psi)([\alpha]) = \Phi($ die einzige σ mit $\sigma(y_0) = \hat{\alpha}(1))$
  $= [p \circ \hat{\alpha}] = [\alpha]$.

- Φ ist ein Gruppenhomomorphismus:

  Seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$.

  $\Phi(\sigma) = [p \circ \alpha]$, wobei α ein Weg von y_0 nach $\sigma(y_0)$ ist
  $\Phi(\tau) = [p \circ \beta]$ —— β —————— $\tau(y_0)$
  $\Phi(\sigma \circ \tau) = [p \circ \gamma]$ —— γ —————— $\sigma(\tau(y_0))$

  $$\Phi(\sigma)\Phi(\tau) = [p \circ \alpha][p \circ \beta] \underset{\substack{\uparrow \\ p \circ \sigma = p}}{=} [p \circ \alpha][p \circ \sigma \circ \beta] = [p \circ (\alpha(\sigma \circ \beta))]$$

  $\alpha(\sigma \circ \beta)$ ist ein Weg von y_0 nach $\sigma(\tau(y_0))$
  $\Rightarrow$ wir dürfen $\gamma = \alpha(\sigma \circ \beta)$ wählen
  $\Rightarrow$ $\Phi(\sigma)\Phi(\tau) = [p \circ \gamma] = \Phi(\sigma \circ \tau)$ $\square$

<u>Beispiel</u>. Nach Übung 5.1, gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{Deck}(\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma) \cong (\Gamma, +)$$

$$\Rightarrow \quad \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong (\Gamma, +) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Satz (Galois-Korrespondenz für Überlagerungen)

Sei X ein z.h. und lokal z.h. Raum, der eine universelle Überlagerung besitzt (z.B. X ist eine z.h. Mannigfaltigkeit).

Sei $p: Y \to X$ eine Galoissche Überlagerung.

Es gibt eine Bijektion:

$$\left\{ \text{Quotienten-Überlagerungen } \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z = Y/\sim \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd} \right\} \cong \{ \text{Untergruppen } H \subset \mathrm{Deck}(Y/X) \}$$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Z \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & Z' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\cong$

$$\left\{ \text{Faktorisierungen } \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd} \text{ und } q \text{ eine z.h. Überlagerung} \right\} \text{ bis auf Isomorphie}$$

$$Z \longmapsto \{ \sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X) : f \circ \sigma = f \}$$

$$Y/H \longleftarrow H$$

Außerdem:
- q ist Galoissch $\iff$ H ist normal
- die Blätterzahl von q = der Index von H.

Bemerkung Vergleichen Sie: L/K endliche Galoissche Körpererweiterung:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen } M/K \\ \text{mit } M \subset L \end{array} \right\} \cong \{ \text{Untergruppen } H \subset \mathrm{Gal}(L/K) \}$$

M/K Galoissch $\iff$ H ist normal

Grad von M/K = Index von H.

Unter dieser Analogie, eine universelle Überlagerung entspricht einem separablen Abschluss.

Lemma Sei X z.h. und lokal z.h., $p: Y \to X$ und $q: Z \to X$ z.h. Überlagerungen.

1) Jede stetige Abbildung $f: Y \to Z$ über X ist eine Überlagerung (insbesondere surjektiv und offen)

2) Wir setzen voraus, dass X eine universelle Überlagerung besitzt.
Seien $f_1, f_2: Y \to Z$ stetige Abbildungen über X. Wenn f_1 und f_2 in einem Punkt $y_0 \in Y$ übereinstimmen, dann $f_1 = f_2$.

Beweis. 1) Übung 4.1(d)

2) Sei $u : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung.

u surjektiv $\Rightarrow \exists z_0 \in \tilde{X}$ mit $u(z_0) = p(y_0)$

Nach Definition einer universellen Überlagerung, gibt es genau eine

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "u"'] & Y \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "p"] & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$h : \tilde{X} \to Y$ über X mit $h(z_0) = y_0$ und genau eine

$h' : \tilde{X} \to Z$ über X mit $h'(z_0) = f_1(y_0) = f_2(y_0)$.

$$\Rightarrow \quad h' = f_1 \circ h = f_2 \circ h$$

Nach 1) ist h surjektiv $\Rightarrow f_1 = f_2$. $\square$

Beweis. • $Y/H \xrightarrow{q} X$ ist eine Überlagerung.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y/H \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$H \subset \mathrm{Deck}(Y/X)$

Jedes $x \in X$ hat eine z.h. Umgebung U mit $p^{-1}(U) \cong \coprod_{i \in I} U$

U z.h. $\Rightarrow \mathrm{Deck}\left(\coprod_{i\in I} U / U\right) \cong$ Permutationen von I.

$$\Rightarrow q^{-1}(U) \cong \left(\coprod_{i\in I} U\right)/_H \cong \coprod_{i \in I/H} U$$

$\Rightarrow q$ ist eine Überlagerung.

• Sei $H \subset \mathrm{Deck}(Y/X)$ und $f : Y \to Y/H$ die Quotientenabbildung.

Wir wollen zeigen, dass $H = \{\sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X) : f \circ \sigma = f\}$

Die Inklusion $\subset$ ist klar.

Sei σ eine Decktransformation mit $f \circ \sigma = f$ und $y \in Y$ beliebig.

$$f(y) = f(\sigma(y)) \Rightarrow \exists \tau \in H \text{ mit } \tau(y) = \sigma(y).$$

$$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \tau = \sigma, \text{ also } \sigma \in H.$$

- Sei $\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "p"] & \\ q: & Z \arrow[r] & X \end{tikzcd}$ eine Quotientenüberlagerung von p.

  und $H = \{\sigma \in Deck(Y/X) : f \circ \sigma = f\}$

  Wir wollen zeigen, dass $Z = Y/H$.

  Nach Definition von H gibt es eine eindeutige stetige Abbildung

$$\begin{tikzcd} Y/H \arrow[rr, "\varphi"] & & Z \\ & Y \arrow[ul, "\text{kan.}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

  Wir wissen schon, dass $Y/H \longrightarrow X$ eine Überlagerung ist.

  Nach dem Lemma, $\varphi : Y/H \longrightarrow Z$ ist surjektiv und offen.

  Es bleibt zu zeigen, dass φ injektiv ist:

  Seien $y_1, y_2 \in Y$ mit $f(y_1) = f(y_2)$.

  Da p Galoisch ist, gibt es eine Decktransformation $\sigma : Y \longrightarrow Y$ mit $\sigma(y_1) = y_2$.

$$(f \circ \sigma)(y_1) = f(y_2) = f(y_1).$$

$$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \quad f \circ \sigma = f, \text{ d.h. } \sigma \in H \Longrightarrow y_1 = y_2 \text{ in } Y/H.$$

- $Z \xrightarrow{q} X$ Galoisch $\Longleftarrow$ H normal.

  $\Longleftarrow$. Seien $x \in X$, $z_1, z_2 \in q^{-1}(x)$.

  Wir suchen $\sigma \in Deck(Z/X)$ mit $\sigma(z_1) = z_2$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z = Y/H \arrow[d, "q"] \\ & X \end{tikzcd} \Longrightarrow \exists\, y_i \overset{f}{\longmapsto} z_i$$

  Y/X ist Galoisch $\Longrightarrow \exists\, \sigma \in Deck(Y/X)$ mit $\sigma(y_1) = y_2$.

  Behauptung: σ induziert $\bar{\sigma} \in Deck(Z/X)$:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y/H \arrow[r, dashed, "\bar{\sigma}"] & Y/H \end{tikzcd}$$

  Sei $\tau \in H$

$$f \circ \sigma \circ \tau \overset{?}{=} f \circ \sigma$$

H normal $\Rightarrow$ $\sigma \circ \tau = \tau' \circ \sigma$ mit $\tau' \in \overset{\{\sigma \mid f\circ\sigma = f\}}{\overset{\shortparallel}{H}}$

$\Rightarrow$ $f \circ \sigma \circ \tau = f \circ \tau' \circ \sigma = f \circ \sigma$.

$\Rightarrow$: q Galoissch. Sei $\tau \in H$, $\sigma \in \mathrm{Deck}(Y/X)$.

$$\sigma \tau \sigma^{-1} \overset{?}{\in} H$$

Sei $y \in Y$. q Galoissch $\Rightarrow$ $\exists\, \bar\sigma \in \mathrm{Deck}(Z/X)$
mit $\bar\sigma(f(y)) = f(\sigma(y))$

$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow}$ $\bar\sigma \circ f = f \circ \sigma$

$\Rightarrow$ $f \sigma \tau \sigma^{-1} = \bar\sigma f \tau \sigma^{-1} = \bar\sigma f \sigma^{-1} = f \sigma \sigma^{-1} = f$

$\Rightarrow$ $\sigma \tau \sigma^{-1} \in H$.

- Blätterzahl = Index

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y/H = Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sei $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$.

Die Operation von $\mathrm{Deck}(Y/X)$ auf $p^{-1}(x_0)$ ist:

- transitiv, weil p Galoissch ist
- frei, nach dem Lemma $(\sigma(y) = \tau(y) \Rightarrow \sigma = \tau)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Deck}(Y/X) \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x_0)$

$\sigma \longmapsto \sigma(y_0)$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{Deck}(Y/X)/H \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x_0)/H = q^{-1}(x_0)$. $\square$.

Korollar Sei X z.h. und lokal einfach zusammenhängend, $x_0 \in X$. Dann gibt es eine Bijektion:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{z.h. punktierte Überlagerungen}\\ (Y,y_0)\xrightarrow{p}(X,x_0)\\ \text{bis auf Isomorphie}\end{array}\right\} \cong \left\{\begin{array}{c}\text{Untergruppen}\\ \text{von } \pi_1(X,x_0)\end{array}\right\}$$

$$p \longmapsto \operatorname{Im}\big(p_*: \pi_1(Y,y_0)\hookrightarrow \pi_1(X,x_0)\big)$$

Beweis. Unter der Voraussetzung, existiert eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \xrightarrow{u} X$ und ein Isomorphismus $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)\cong \pi_1(X,x_0)$, der von der Wahl eines ~~pt~~ Punktes $\tilde{x}_0 \in u^{-1}(x_0)$ abhängt:

$$\sigma \longmapsfrom [\alpha]$$
mit $\sigma(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0[\alpha]$.

nach Definition universeller Überlagerung

$$\left\{\begin{array}{c}\text{z.h. punktierte Überlagerungen}\\ p:(Y,y_0)\to(X,x_0)\end{array}\right\} \cong \left\{\text{Quotientenüberlagerungen } \begin{array}{c}\tilde{X}\xrightarrow{f} Y\\ u\searrow\ \swarrow p\\ X\end{array}\right\}$$

$$(Y, f(\tilde{x}_0)) \longleftarrow (Y,f)$$

$$(Y,y_0) \longmapsto \text{die einzige } f:\tilde{X}\to Y \text{ mit } f(\tilde{x}_0)=y_0$$

$$\cong \qquad\qquad (Y,f) \longmapsto \{\sigma \mid f\circ\sigma = f\} \qquad \cong$$

$\tilde{X}/X$ Galoissch + Galois-Korrespondenz

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Untergruppen von}\\ \pi_1(X,x_0)\end{array}\right\} \cong \left\{\text{Untergruppen von } \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)\right\}$$

$\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X,x_0)$

$\sigma \longmapsto [u\circ(\text{Weg von } \tilde{x}_0 \text{ nach } \sigma(\tilde{x}_0))]$

$\square$

<u>Bemerkung</u> (Veränderungen für nicht-punktierte Überlagerungen und nicht-zusammenhängende Überlagerungen)

Sei $p: Y \to X$ wie in Korollar.

$y_0, y_1 \in p^{-1}(x_0)$ und γ ein Weg von y_0 nach y_1.

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \pi_1(Y, y_0) \arrow[r, "\gamma_*", "\cong"'] \arrow[d, hook, "p_*"'] & \pi_1(Y, y_1) \arrow[d, hook, "p_*"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\cong", "(p \circ \gamma)_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

$$[\alpha] \longmapsto g^{-1}[\alpha]g \quad \text{wobei } g = [p \circ \gamma].$$

$\Rightarrow$ die Untergruppen $\pi_1(Y, y_0)$ und $\pi_1(Y, y_1)$ von $\pi_1(X, x_0)$ sind <u>konjugiert</u>.

Umgekehrt, sei $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, dann $\exists\, \hat{\gamma} : I \to Y$ von y_0 nach $y_0[\gamma]$. Wegen $(*)$, sind die Untergruppen $\pi_1(Y, y_0)$ und $\pi_1(Y, y_0[\gamma])$ durch $[\gamma]$ konjugiert.

Damit ist gezeigt:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{z.h. Überlagerungen von } X \\ \text{bis auf Isomorphie} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen von } \pi_1(X, x_0) \\ \text{bis auf Konjugation} \end{array} \right\}$$

Für irgendeine Gruppe G, gibt es eine Bijektion:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen von } G \\ \text{bis auf Konjugation} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{transitiven } G\text{-Mengen bis} \\ \text{auf Isomorphie} \end{array} \right\}$$

$$(H \subset G) \longmapsto G/H$$

Das Korollar kann dann zu nicht-zusammenhängenden Überlagerungen wie folgt verallgemeinert werden.

$$\{ \text{Überlagerungen von } X \} \cong \{ \pi_1(X, x_0)\text{-Mengen} \}$$

$$(p: Y \to X) \longmapsto p^{-1}(x_0) \text{ mit der Monodromieoperation}$$

Das ist sogar eine Äquivalenz von Kategorien.

Beispiele.

1) $X = \mathbb{C}^*$ $\qquad \pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$

$$\{\text{z.h. Überlagerungen von } \mathbb{C}^*\} \cong \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}\}$$
$$= \{n\mathbb{Z} : n \geq 0\}$$
$$p \longmapsto \operatorname{Im} p_* \subset \pi_1(\mathbb{C}^*).$$

- die universelle Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \longmapsto 0\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

- für $n \geq 1$, $p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$ $\longmapsto \operatorname{Im} p_{n*} = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Dies sind alle Überlagerungen von $\mathbb{C}^*$, bis auf Biholomorphie.

2) $X = \mathbb{C}/\Gamma$ $\qquad \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \Gamma$.

$$\{\text{z.h. Überlagerungen von } \mathbb{C}/\Gamma\} \cong \{\text{Untergruppen von } \Gamma\}$$
$$(\mathbb{C}/H \to \mathbb{C}/\Gamma) \longleftarrow\!\shortmid H \subset \Gamma$$

z.B.:
- $\mathbb{C}/n\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma$ ist eine Überlagerung mit n^2 Blättern
- $\begin{array}{ccc} z & \mathbb{C}/\mathbb{Z} & \longrightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i) \\ \downarrow & \wr\wr & \\ \exp(2\pi i z) & \mathbb{C}^* & \end{array}$ unendliche Überlagerung.