Kapitel 4: Funktionskeime und analytische Fortsetzung

Einleitung X eine Riemannsche Fläche.

i) $U \subset X$ offen $\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}(U) = \{\text{holomorphe Funktionen } U \to \mathbb{C}\}$

ii) $V \subset U$ $\rightsquigarrow$ Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\rho^U_V} \mathcal{O}(V)$
$f \longmapsto f|_V$

iii) $W \subset V \subset U$ $\rightsquigarrow$ kommutatives Dreieck:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) \arrow[rr, "\rho^U_V"] \arrow[dr, "\rho^U_W"'] & & \mathcal{O}(V) \arrow[dl, "\rho^V_W"] \\ & \mathcal{O}(W) & \end{tikzcd}$$

Holomorphie ist ein „lokaler Begriff" im folgenden Sinne:

iv) Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $U \subset X$
Zu jeder Familie holomorpher Funktionen
$$(f_i \in \mathcal{O}(U_i))_{i \in I}$$
mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i, j \in I$
gibt ~~es~~ genau eine $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Definition. $x \in X$. Der Ring der holomorphen Funktionskeime im Punkt x ist:

$$\mathcal{O}_x := \left\{ (U, f) : \begin{array}{l} U \text{ offene Umgebung von } x \\ \text{und } f \in \mathcal{O}(U) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

wobei $(U, f) \sim (V, g) \iff \exists$ Umgebung $W \subset U \cap V$ mit $f|_W = g|_W$.

und $[U, f] \pm [V, g] := [U \cap V, f|_{U \cap V} \pm g|_{U \cap V}]$.

(anders gesagt: $\mathcal{O}_x = \operatorname{colim}_{x \in U} \mathcal{O}(U)$)

Es gibt kanonische Ringhomomorphismen $\rho_x : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$ für alle $x \in U$:
$\rho_x(f) = [U, f]$

Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen impliziert:

v) U zusammenhängend, $x \in U \Rightarrow \rho_x : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_x$ ist injektiv.

Aber ρ_x ist nicht surjektiv ($\exists$ holomorphe Funktionen mit endlichem Konvergenzradius)

Analytische Fortsetzung: sei $\varphi \in \mathcal{O}_x$ ein holomorpher Funktionskeim, $U \ni x$.
Gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\rho_x(f) = \varphi$?

Anstatt von holomorphen Funktionen kann man andere Arten von Funktionen auf X betrachten:

holomorph meromorph reell analytisch lokal konstant	} erfüllen i) – v)
C^k-diff'bar $k = 1, \ldots, \infty$ diff'bar stetig beliebig	} erfüllen i) – iv) aber nicht v)
konstant	} erfüllen i) – iii) aber nicht iv)

<u>Definition</u>. Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe von Mengen (oder Gruppen, Ringen ...) $\mathcal{F}$ auf X besteht aus:

i) Mengen (bzw. Gruppen, ...) $\mathcal{F}(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$

ii) Abbildungen (bzw. Gruppenhomomorphismen, ...)

$$\rho^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \quad \text{für alle Paare offener Teilmengen } V \subset U.$$

mit folgenden Eigenschaften:

iii) $\rho^U_U = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ für alle $U \subset X$

$\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$ für alle $W \subset V \subset U$.

[Anders gesagt: $\mathcal{F}$ ist ein kontravarianter Funktor
von der Kategorie offener Teilmengen von X
mit Inklusionen als Morphismen
nach der Kategorie von Mengen, Gruppen, ...]

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen <u>Schnitte</u> von $\mathcal{F}$ über U.

Man schreibt oft $f|_V$ statt $\rho^U_V(f)$.

<u>Definition</u> Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X heißt <u>Garbe</u>, wenn folgendes Axiom gilt:

(Garbenaxiom) Sei $U \subset X$ offen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U. Zu jeder Familie von Elementen $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle $i,j \in I$ gibt es <u>genau einen</u> $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ ist ein Limes.

<u>Bemerkung über $\emptyset$</u>: die leere Familie ist eine Überdeckung von $\emptyset$
Das Garbenaxiom impliziert, daß $\mathcal{F}(\emptyset)$ genau ein Element hat.

<u>Beispiele</u>.

1) Seien X, Y Räume. $U \subset X$ offen

$$\mathcal{C}(U,Y) = \{\text{stetige Abbildungen } U \to Y\}$$
$$\rho^U_V(f) = f|_V$$

Dann $\mathcal{C}(-,Y)$ ist eine Garbe auf X.
Zwei Sonderfälle:

- M eine Menge, $\mathrm{Abb}(U,M) = \mathcal{C}(U, M$ mit der trivialen Topologie$)$
  $\Rightarrow$ $\mathrm{Abb}(-,M)$ ist eine Garbe auf X
- M eine Menge,
  $\underline{M}(U) := \{\text{lokalkonstante Abbildungen } U \to M\} = \mathcal{C}(U, M$ mit der diskreten Topologie$)$
  $\Rightarrow$ $\underline{M}$ ist eine Garbe auf X.
  Sie heißt die <u>konstante Garbe</u> mit Faser M.

2) (Verallgemeinerung von 1)

Sei $p: Y \to X$ eine stetige Abbildung.

Die <u>Garbe der Schnitte</u> von p ist:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[ur, dashed, "s"] \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F}(U) = \{ s: U \to Y \text{ stetig mit } p \circ s = \mathrm{Id}_U \}$$

$$\rho^U_V(s) = s|_V .$$

$\left(\mathcal{C}(-, Y) \text{ ist die Garbe der Schnitte von der Projektion } X \times Y \to X \right)$

3) Sei X eine Riemannsche Fläche.

Die Garbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen auf X ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}(U) = \{ \text{holomorphe Funktionen } U \to \mathbb{C} \}.$$

Wir werden auch die Garbe $\mathcal{E}_X$ der glatten (beliebig oft diff'bar) Funktionen auf X betrachten:

$$\mathcal{E}_X(U) = \mathcal{E}(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) = \{ f: U \to \mathbb{C} : f \circ \varphi^{-1} \text{ ist glatt für jede Karte } \varphi \text{ auf } U \}$$

4) Meromorphe Funktionen bilden auch eine Garbe $\mathcal{M}_X$ auf X:

$$\mathcal{M}_X(U) = \mathcal{M}(U) = \{ \text{meromorphe Funktionen } f: U \setminus P \to \mathbb{C} \}$$

$$V \subset U \rightsquigarrow \rho^U_V(f) = f|_V : V \setminus (P \cap V) \to \mathbb{C} .$$

Garbenaxiom: $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U.

$f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ mit Polstellenmenge $P_i \subset U_i$

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \implies P_i \cap U_j = P_j \cap U_i$$

$\implies$ die Menge $P := \bigcup_{i \in I} P_i \subset U$ ist lokal endlich

und $P \cap U_i = P_i$.

$(U_i \setminus P_i)_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung von $U \setminus P$

$\implies$ es gibt genau eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus P)$ mit $f|_{U_i \setminus P_i} = f_i$

$\implies$ es gibt genau eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

Invertierbare Elemente eines Ringes

5) $\mathcal{O}^*(U) = \mathcal{O}(U)^* = \{\text{holomorphe Funktionen } U \to \mathbb{C}^*\}$

$\rightsquigarrow$ Garbe $\mathcal{O}_X^*$

$\mathcal{M}^*(U) = \mathcal{M}(U)^* = \left\{ \begin{array}{l} \text{meromorphe Funktionen auf } U \\ \text{die auf keiner Zh.-Komponente von } U \\ \text{identisch verschwinden} \end{array} \right\}$

$\rightsquigarrow$ Garbe $\mathcal{M}_X^*$

<u>Erinnerung</u>: U z.h. $\Rightarrow$ $\mathcal{M}(U)$ ist ein Körper

Insbesondere $\mathcal{M}^*(U) = \mathcal{M}(U) \setminus \{0\}$.

<u>Zusammenfassung</u> Sei X eine Riemannsche Fläche.

Es gibt auf X folgende Garben und Garbeninklusionen:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{O}_X^* & \subset & \mathcal{O}_X & \subset & \mathcal{E}_X & \subset & \mathcal{C}(-,\mathbb{C}) & \subset & \mathrm{Abb}(-,\mathbb{C}) \\ \cap & & \cap & & & & & & \\ \mathcal{M}_X^* & \subset & \mathcal{M}_X & & & & & & \end{array}$$

Garben abelscher Gruppen

Garben kommutativer Ringe

<u>Halme und Keime</u>

Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X.

Der <u>Halm</u> von $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in X$ ist die Menge (oder Gruppe, ...)

$$\mathcal{F}_x := \{ (U,f) : U \text{ off. Umgebung von } x,\ f \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

wobei $(U,f) \sim (V,g) \iff \exists\ W \subset U \cap V$ off. Umgebung von x

mit $\underbrace{f|_W}_{\rho^U_W(f)} = g|_W$

[$\mathcal{F}_x$ ist der filtrierte Kolimes $\operatorname{colim}_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$]

Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\rho_x : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x, \quad f \longmapsto [U,f]$$

$\rho_x(f)$ heißt der <u>Keim</u> von f im Punkt x.

Beispiel.

- $X = \mathbb{C}$, $x = 0$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C},0} = \left\{ \text{Potenzreihen } \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \text{ mit } a_i \in \mathbb{C} \text{ und positivem Konvergenzradius} \right\}$$

Das ist ein Unterring des Ringes $\mathbb{C}[\![z]\!]$ aller formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$.

Für eine beliebige Riemannsche Fläche X, $x \in X$, die Wahl einer Karte φ um x mit $\varphi(x) = 0$ induziert einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}.$$

- Für die Garbe $\mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C},0} = \left\{ \text{Laurentreihen } \sum_{i=-k}^{\infty} a_i z^i \text{ mit endlichem Hauptteil und positivem Konvergenzradius} \right\}$$

$$\subset \mathbb{C}((z)) := \text{der Quotientenkörper von } \mathbb{C}[\![z]\!].$$

und $\mathcal{M}_{X,x} \cong \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}$.

Lemma. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $f, g \in \mathcal{F}(U)$. Dann:

$$f = g \iff \rho_x(f) = \rho_x(g) \text{ für alle } x \in U.$$

Beweis. $\rho_x(f) = \rho_x(g) \iff \exists\ U_x$ eine Umgebung von x mit $f|_{U_x} = g|_{U_x}$

$$\left.\begin{array}{r} (U_x)_{x \in U} \text{ überdeckt } U \\ f|_{U_x} = g|_{U_x} \end{array}\right\} \underset{\text{Garbenaxiom}}{\Longrightarrow} f = g.$$

□

Definition. Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X genügt dem Identitätssatz, wenn

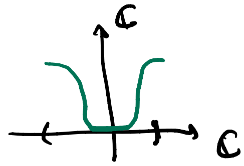
$$\rho_x : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x \quad \text{injektiv ist}$$

für alle $x \in X$ und alle zusammenhängende Umgebungen U von x.

Beispiel Auf einer Riemannschen Fläche X, $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{M}_X$ genügen dem Identitätssatz (siehe Kapitel 1).

Aber $\mathcal{E}_X$ genügt ihm nicht:

o.B.d.A. $X = D \subset \mathbb{C}$. Es existiert glatte Funktionen $f: D \to \mathbb{C}$, die in einer Umgebung von 0 verschwinden aber die nicht identisch null sind:



Konstruktion Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X.

Wir konstruieren einen top. Raum $|\mathcal{F}|$ über X, der Étalé-Raum von $\mathcal{F}$.

$$|\mathcal{F}| := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x \qquad \begin{aligned} p: |\mathcal{F}| &\longrightarrow X \\ (\varphi \in \mathcal{F}_x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Für $U \subset X$ offene Teilmenge und $f \in \mathcal{F}(U)$, sei

$$U(f) = \coprod_{x \in U} \{\rho_x(f)\} \subset \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x = |\mathcal{F}|.$$

Satz.

1) Das System aller Mengen $U(f)$ ist eine Basis für eine Topologie auf $|\mathcal{F}|$

2) Die Abbildung $p: |\mathcal{F}| \longrightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus

3) Falls X lokal zusammenhängend und Hausdorffsch ist und $\mathcal{F}$ dem Identitätssatz genügt, dann ist $|\mathcal{F}|$ Hausdorffsch.

Beweis. 1) • die $U(f)$ überdecken $|\mathcal{F}|$: klar.

• Sei U, $f \in \mathcal{F}(U)$
V, $g \in \mathcal{F}(V)$ und $\varphi \in U(f) \cap V(g)$, $x = p(\varphi)$.

Wir suchen W, $h \in \mathcal{F}(W)$ mit $\varphi \in W(h) \subset U(f) \cap V(g)$.

$x \in U \cap V$ und $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$ nach Definition von $U(f)$ und $V(g)$.

$\Longrightarrow$ $\exists$ $W \subset U \cap V$ Umgebung von x mit $f|_W = g|_W$.

Sei $h = f|_W = g|_W \in \mathcal{F}(W)$. Dann $\varphi \in W(h) \subset U(f) \cap V(g)$.

$\rho_y(h) = \rho_y(f) = \rho_y(g)$ für alle $y \in W$.

2) Sei $\varphi \in \mathcal{F}_x \subset |\mathcal{F}|$ $\quad \varphi = [U, f]$ mit einer Umgebung U von x und $f \in \mathcal{F}(U)$.

Denn $\varphi \in U(f) = \coprod_{y \in U} \{\rho_y(f)\}$

<u>Behauptung</u> $p|_{U(f)} : U(f) \longrightarrow U$ ist ein Homöomorphismus:

- bijektiv : klar
- stetig : $\left(p|_{U(f)}\right)^{-1}(V) = \coprod_{y \in V} \{\rho_y(f)\} = V(f|_V)$
- offen : $p\left(V(g)\right) = V$.

3). Seien $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in |\mathcal{F}|$

Es gibt zwei Fälle:

- $p(\varphi_1) \neq p(\varphi_2)$. Da X Hausdorffraum ist, gibt es disjunkte Umgebungen U_1 von $p(\varphi_1)$ und U_2 von $p(\varphi_2)$.
  Dann $p^{-1}(U_1)$ und $p^{-1}(U_2)$ sind disjunkte Umgebungen von φ_1 und φ_2.
- $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_x$ man kann schreiben $\varphi_1 = [U, f]$ und $\varphi_2 = [U, g]$ mit U zusammenhängend.
  Denn $U(f) \cap U(g) = \emptyset$: Falls $\exists\ \psi \in U(f) \cap V(g)$
  dann $\rho_y(f) = \rho_y(g)$ mit $y = p(\psi)$
  also $f = g$ auf U nach dem Identitätssatz
  und damit $\varphi_1 = \varphi_2$. Widerspruch! $\square$

Morphismen von Prägarben.

Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Prägarben von Mengen (oder Gruppen, Ringen, ...) auf X.

Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist eine Familie von Morphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \quad , \qquad U \subset X \text{ offen}$$

die mit den Einschränkungsabbildungen verträglich sind, d.h.:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutiert für alle $V \subset U \subset X$.

Wir schreiben oft $\alpha : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ anstatt von α_U.

α induziert auch Morphismen zwischen Halmen:

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$
$$[U, f] \longmapsto [U, \alpha_U(f)].$$

<u>Satz</u>. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ <u>Garben</u> auf X und $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus. Dann:

1) α_x ist injektiv für alle $x \in X \iff \alpha_U$ ist injektiv für alle $U \subset X$.
2) dasselbe für "bijektiv".

⚠ Der Satz gilt nicht für „surjektiv":

$$\exp : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \quad , \quad f \longmapsto \exp \circ f$$

induziert eine surjektive Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}^*_{X,x}$ für alle $x \in X$, weil X lokal einfach zusammenhängend ist, und $\exp : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^*(U)$ surjektiv ist, wenn U einfach zusammenhängend ist (Liftungssatz). Aber sonst ist $\exp : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^*(U)$ <u>nicht</u> surjektiv (siehe Übung 6.3).

Beweis. Die Implikationen $\Leftarrow$ sind klar.

1) α_x ist injektiv für alle x.

Seien $f, g \in \mathcal{F}(U)$ mit $\alpha(f) = \alpha(g) \in \mathcal{G}(U)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\rho_x"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_x"] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, hook, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow \rho_x(f) = \rho_x(g)$ für alle $x \in U \underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} f = g$.

2) α_x ist bijektiv für alle x.

Es bleibt zu zeigen, dass α_U surjektiv ist.

Sei $g \in \mathcal{G}(U)$.

α_x surjektiv $\Longrightarrow \rho_x(g) = \alpha_x([U_x, f_x])$

$\Longrightarrow$ es gibt eine Umgebung $V_x \subset U_x$ von x mit

$$g|_{V_x} = \alpha(f_x|_{V_x})$$

Auf $V_x \cap V_y$: $\alpha(f_x|_{V_x \cap V_y}) = g|_{V_x \cap V_y} = \alpha(f_y|_{V_x \cap V_y})$

$\alpha_{V_x \cap V_y}$ injektiv $\Longrightarrow f_x|_{V_x \cap V_y} = f_y|_{V_x \cap V_y}$

Nach dem Garbenaxiom für $\mathcal{F}$, $\exists!\, f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{V_x} = f_x|_{V_x}$.

Dann $\rho_x(\alpha(f)) = \rho_x(g)$ für alle $x \in U$

$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \alpha(f) = g$. $\square$

Definition. Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Garben heißt:

- Monomorphismus, wenn α_x für jedes $x \in X$ injektiv ist
- Epimorphismus, ——— surjektiv —
- Isomorphismus, ——— bijektiv —

($\Longleftrightarrow \exists\, \beta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ mit $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}}$ und $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, nämlich $\beta_U := \alpha_U^{-1}$)

Definition Sei $\mathcal{F}$ ein Prägarbe auf X.

Die Vergarbung von $\mathcal{F}$ oder die assoziierte Garbe zu $\mathcal{F}$ ist die Garbe der Schnitte von $p: |\mathcal{F}| \longrightarrow X$.

Sie wird mit $a(\mathcal{F})$ bezeichnet.

Es gibt einen kanonischen Morphismus

$$\eta: \mathcal{F} \longrightarrow a(\mathcal{F}), \quad f \in \mathcal{F}(U) \longmapsto \begin{tikzcd} & {|\mathcal{F}|} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed, "x \mapsto f_x(f)"] & X \end{tikzcd}$$

Übungsblatt 7: η induziert Bijektionen $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\cong} a(\mathcal{F})_x$ für alle $x \in X$.

Insbesondere, $\mathcal{F}$ Garbe $\Longrightarrow \eta: \mathcal{F} \xrightarrow{\cong} a(\mathcal{F})$ ist ein Isomorphismus.

Definition. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Garben abelscher Gruppen auf X und $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus. Man definiert:

- $\mathrm{Ker}(\alpha)$: $\quad U \longmapsto \mathrm{Ker}(\alpha_U) = \{ f \in \mathcal{F}(U) : \alpha(f) = 0 \}$

  Beobachtung: $\mathrm{Ker}(\alpha)$ ist eine Garbe und $\mathrm{Ker}(\alpha)_x \cong \mathrm{Ker}(\alpha_x)$

  Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von U, $(f_i \in \mathrm{Ker}(\alpha_{U_i}))_{i \in I}$ mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. Dann $\exists!\, f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f|_{U_i} = f_i$.

  $\alpha(f)|_{U_i} = \alpha(f_i) = 0 \Longrightarrow \alpha(f) = 0$ d.h. $f \in \mathrm{Ker}(\alpha_U)$.

- $\mathrm{Im}(\alpha) = a(U \longmapsto \mathrm{Im}\, \alpha_U)$

  Beobachtung: der induzierte Morphismus $\mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow a(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$ ist ein Monomorphismus:

  $$\mathrm{Im}(\alpha)_x \cong \mathrm{Im}(\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x) \hookrightarrow \mathcal{G}_x$$

- $\mathrm{Coker}(\alpha) = a(U \longmapsto \mathrm{Coker}(\alpha_U) = \mathcal{G}(U)/\mathrm{Im}(\alpha_U))$

  $\Longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha)_x \cong \mathrm{Coker}(\alpha_x)$

  Sonderfall: wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ eine Untergarbe von $\mathcal{G}$ ist, die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ ist $\mathrm{Coker}(\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G})$.

Definition Seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Garben abelscher Gruppen auf X. Eine Sequenz

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

heißt **exakt**, wenn für jedes $x \in X$ die Sequenz abelscher Gruppen

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

exakt ist (d.h.: $\mathrm{Ker}(\beta_x) = \mathrm{Im}(\alpha_x)$).

Bemerkungen
- $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ exakt $\Longleftrightarrow$ α ist ein Monomorphismus
- $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to 0$ exakt $\Longleftarrow$ α ist ein Epimorphismus
- $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ exakt $\Longleftrightarrow$ $\beta \circ \alpha = 0$ und der induzierte Morphismus $\mathrm{Im}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\beta)$ ist ein Isomorphismus

Korollar $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ Garben abelscher Gruppen auf X. Eine Sequenz

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \qquad (*)$$

ist genau dann exakt, wenn für alle $U \subset X$ die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \qquad (**)$$

exakt ist (d.h.: α_U injektiv und $\mathrm{Im}(\alpha_U) = \mathrm{Ker}(\beta_U)$)

Beweis. $(*)$ ist exakt $\Longleftrightarrow$ $(*)_x$ ist exakt für alle $x \in X$

$\Longleftrightarrow$ $\beta_x \circ \alpha_x = 0$ und $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(\beta_x)$ für alle $x \in X$

$\overset{\text{Satz}}{\Longleftrightarrow}$ $\beta_U \circ \alpha_U = 0$ und $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(\beta_U)$ für alle $U \subset X$

$\mathcal{F}$ und $\mathrm{Ker}(\beta)$ sind Garben

$\Longleftrightarrow$ $(**)$ ist exakt. $\square$

Beispiel. X Riemannsche Fläche. Die Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

$\underline{\mathbb{Z}}(U) = \{$ lokalkonstante Abbildungen $U \to \mathbb{Z} \}$

ist exakt, wobei: $\underline{\mathbb{Z}}$ ist die konstante Garbe mit Faser $\mathbb{Z}$

$$\underline{\mathbb{Z}}(U) \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{O}_X(U) \text{ ist } (\underbrace{f : U \to \mathbb{Z}}_{\text{lokalkonstant}}) \longmapsto 2\pi i \cdot f$$

$$\exp(f) = \exp \circ f.$$

- $2\pi i$ Monomorphismus: klar
- $\exp$ Epimorphismus: schon gezeigt (*) (folgt aus dem Liftungssatz für Überlagerungen)
- $\mathrm{Im}(2\pi i) = \mathrm{Ker}(\exp)$:

$$f \in \mathcal{O}(U): \quad \exp \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset 2\pi i \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{diskret}}$$
$$\iff f \in 2\pi i\, \underline{\mathbb{Z}}(U)$$

(*) (U einfach zh $\Longrightarrow$ jede $f \in \mathcal{O}^*(U)$ hat einen Logarithmus $F \in \mathcal{O}(U)$ d.h. $\exp \circ F = f$.)

Definition (analytische Fortsetzung längs eines Weges)

Sei X eine Riemannsche Fläche, $\alpha : I \to X$ ein Weg von x nach y, und $\varphi \in \mathcal{O}_x$ ein holomorpher Funktionskeim.

Man sagt, ein Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_y$ entsteht durch analytische Fortsetzung längs α aus φ, falls folgendes gilt:

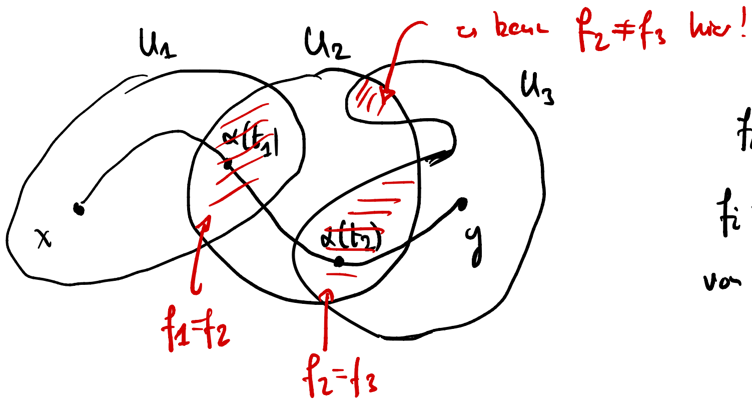
Es gibt eine Familie von Keimen $\varphi_t \in \mathcal{O}_{\alpha(t)}$ mit $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_1 = \psi$, und zu jedem $t \in I$ existiert eine Umgebung U von $\alpha(t)$ und eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $\rho_{\alpha(s)}(f) = \varphi_s$ für alle s in einer Umgebung von t.

Bemerkung. Da I kompakt ist, ist die Bedingung äquivalent zu:

$\exists$ Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$
offene Teilmengen $U_1, \dots, U_n \subset X$ mit $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$
und $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ so daß:

- $\rho_x(f_1) = \varphi$ und $\rho_y(f_n) = \psi$
- für $0 < i < n$, $\rho_{\alpha(t)}(f_i) = \rho_{\alpha(t)}(f_{i+1})$ für alle t in einer Umgebung von t_i

($\Leftarrow$ nur für $t = t_i$, nach dem Identitätssatz)

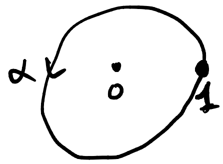


$f_i \in \mathcal{O}(U_i)$

$f_i = f_{i+1}$ auf der Zusammenhangskomponente von $U_i \cap U_{i+1}$, in der $\alpha(t_i)$ liegt.

Beispiel Sei $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},1}$ (Konvergenzradius $= 1$)

$$\varphi = \log(z) \quad \text{für } z \in (0,2)$$



α Schleife um 0

$U_1 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ $\quad f_1(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta \quad -\pi < \theta < \pi$

$U_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$ $\quad f_2(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta \quad 0 < \theta < 2\pi$

$U_3 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ $\quad f_3(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta + 2\pi i \quad -\pi < \theta < \pi$

$f_1 = f_2$ auf $\mathbb{H}$, aber nicht auf ganz $U_1 \cap U_2$

$f_2 = f_3$ auf $-\mathbb{H}$

$\Rightarrow$ $\psi = \rho_1(f_3) = \varphi + 2\pi i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},1}$ entsteht durch analytische Fortsetzen längs α aus φ.

Verallgemeinerung: für die Schleife $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ gilt:

$\varphi \rightsquigarrow \varphi + 2\pi i n$ durch analytische Fortsetzung längs α_n.

Lemma. Sei X, α, φ wie in der Definition. Eine Familie $(\varphi_t)_{t \in I}$ erfüllt die Bedingungen der Definition genau dann, wenn die Abbildung $\hat{\alpha} : I \longrightarrow |\mathcal{O}_X|$, $\hat{\alpha}(t) = \varphi_t$ stetig ist.

Anders gesagt: analytische Fortsetzung von φ längs α $\iff$ Liftung von α bzgl. $p : |\mathcal{O}_X| \longrightarrow X$ mit Anfangspunkt $\varphi \in |\mathcal{O}_X|$.

Beweis. Sei $t \in I$ und $\varphi_t = [U, f] \in \mathcal{O}_{\alpha(t)}$.

$\coprod_{x \in V} \{\rho_x(f)\}$

$\Rightarrow \{V(f|_V) : \alpha(t) \in V \subset U\}$ ist eine Umgebungsbasis von φ_t in $|\mathcal{O}_X|$.

$\hat{\alpha}$ ist stetig in $t \iff \forall V \; \exists \varepsilon \;\; \hat{\alpha}(B(t,\varepsilon)) \subset V(f|_V)$

$\iff \forall V \; \exists \varepsilon$ mit $\alpha(s) \in V$ und $\varphi_s = \rho_{\alpha(s)}(f)$ für alle $s \in B(t,\varepsilon)$

$\overset{\alpha \text{ stetig}}{\iff} \exists \varepsilon$ mit $\varphi_s = \rho_{\alpha(s)}(f)$ für alle $s \in B(t,\varepsilon)$ $\square$.

Satz Sei X eine Riemannsche Fläche, $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_x$.

1) (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)
Sei $\alpha : I \to X$ ein Weg mit $\alpha(0) = x$.
Entstehen ψ und ψ' aus φ durch analytische Fortsetzung längs α, so ist $\psi = \psi'$.

2) (Monodromiesatz) Seien $\alpha, \beta : I \to X$ zwei Wege von x nach y, die durch eine Homotopie $H: I \times I \to X$ homotop sind.
Wenn φ sich längs jedes Weges $H(-, s)$ analytisch fortsetzen läßt, dann ergeben die analytische Fortsetzung von φ längs α und β denselben Funktionskeim $\psi \in \mathcal{O}_y$.

Beweis. $p: |\mathcal{O}_X| \to X$ ist ein lokaler Homöomorphismus und $|\mathcal{O}_X|$ ist Hausdorffsch, weil $\mathcal{O}$ dem Identitätssatz genügt.
1) und 2) folgen aus den Liftungssätzen vom Kapitel 3 $\square$.

Korollar Wenn X einfach zusammenhängend ist, folgende Aussagen sind äquivalent:

1) es gibt $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $\rho_x(f) = \varphi$.

2) φ läßt sich längs jedes Weges analytisch fortsetzen.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2) klar.
2) $\Rightarrow$ 1): Sei $y \in X$. Wir wählen einen Weg α von x nach y.
Sei $\psi \in \mathcal{O}_{X,y}$ die analytische Fortsetzung von φ längs α.
Dann setzen wir $f(y) := \psi(y)$. $\square$.

Bemerkung. Sei $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$, der der Bedingung 2) genügt. Nach dem Monodromiesatz gibt es eine wohldefinierte Abbildung:

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \mathcal{O}_x$$
$$[\alpha] \longmapsto \text{analytische Fortsetzung von } \varphi \text{ längs } \alpha.$$

z.B. $X = \mathbb{C}^*$, $\varphi = \rho_1(\log)$ $\rightsquigarrow$ $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C},1}$
$$n \longmapsto \varphi + 2\pi i n$$

__Konstruktion.__ Sei $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung, $x \in X$.

Die Ringhomomorphismen $f^*: \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(f^{-1}(V))$, $\forall\, V \ni f(x)$

induzieren $f^*: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, $[V,g] \mapsto [f^{-1}(V), g \circ f]$.

Ist f unverzweigt, so ist $f^*: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ ein Isomorphismus.

Die Umkehrabbildung wird mit $f_*: \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{Y,f(x)}$ bezeichnet.

__Definition__ Sei X eine Riemannsche Fläche, $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$.

- Ein Quadrupel (Y, p, f, y) heißt __analytische Fortsetzung__ von φ, wenn folgendes gilt:

  i) Y ist eine zusammenhängende Riemannsche Fläche

  ii) $p: Y \to X$ ist eine unverzweigte holomorphe Abbildung

  iii) $f \in \mathcal{O}(Y)$

  iv) $y \in Y$ mit $p(y) = x$ und

  $$p_*(\rho_y(f)) = \varphi \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

- Eine analytische Fortsetzung (Y, p, f, y) heißt __maximal__, wenn für jede analytische Fortsetzung (Z, q, g, z) von φ, eine holomorphe Abbildung $r: Z \to Y$ existiert, so daß

  $$p \circ r = q, \quad f \circ r = g, \quad \text{und } r(z) = y.$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "r"] \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[dr, "q"'] & Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C} \\ & X & \end{tikzcd}$$

__Bem.__ Da Z zusammenhängend ist und Y Hausdorffsch ist, ist r eindeutig.
Insbesondere, eine maximale analytische Fortsetzung ist eindeutig bis auf Isomorphie.

__Satz.__ X Riemannsche Fläche, $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$.
Eine maximale analytische Fortsetzung von φ existiert.

Lemma Sei (Y, p, f, y) eine analytische Fortsetzung von $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ und

(nicht benutzt)

$\alpha : I \to Y$ ein Weg mit $\alpha(0) = y$.

Dann $\psi = p_*(\rho_{\alpha(1)}(f))$ entsteht aus φ durch analytische Fortsetzung längs $p \circ \alpha : I \to X$.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} & & {|\mathcal{O}_Y|} \arrow[dl] \arrow[d, "q"] \\ I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, bend left, "\hat{\alpha}"] & Y \arrow[d, "p"] & {|\mathcal{O}_X|} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

wobei $\hat{\alpha}(t) = \rho_{\alpha(t)}(f)$

$q|_{\mathcal{O}_y} = p_* : \mathcal{O}_y \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{p(y)}$

$$q^{-1}(U(f)) = p^{-1}(U)(f \circ p) \subset |\mathcal{O}_Y| \quad \Longrightarrow \quad q \text{ stetig.}$$

$\coprod_{x \in U} \{\rho_x(f)\}$

$q \circ \hat{\alpha}$ ist eine Liftung von $p \circ \alpha$ mit

$$(q \circ \hat{\alpha})(0) = p_*(\rho_{\underbrace{\alpha(0)}_{y}}(f)) = \varphi$$

$$(q \circ \hat{\alpha})(1) = p_*(\rho_{\alpha(1)}(f)) = \psi. \qquad \square$$

Beweis des Satzes.

Sei:

- X_φ die Zusammenhangskomponente von $|\mathcal{O}_X|$, in der φ liegt.
- $p : X_\varphi \to X$ die Einschränkung der kanonischen Abbildung $p : |\mathcal{O}_X| \to X$.
- $f : |\mathcal{O}| \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad f(\psi) = \psi(p(\psi))$

  d.h.: wenn $\psi = [U, g] \in \mathcal{O}_a$, dann $f(\psi) := g(a)$.
- $y = \varphi \in X_\varphi$.

Behauptung: (X_φ, p, f, y) ist eine analytische Fortsetzung von φ:

p lokal Homöomorphismus $\Longrightarrow$ $|\mathcal{O}|$ besitzt eine eindeutige komplexe Struktur, so daß p holomorph ist.

$f \in \mathcal{O}(|\mathcal{O}|)$, weil

$$\begin{tikzcd} U(g) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"', "\text{biholo}"] & \mathbb{C} \\ U \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

und

$$\mathcal{O}_{|\mathcal{O}|, y} \xrightarrow[\cong]{p_*} \mathcal{O}_{X,x}$$

$$\rho_y(f) \longmapsto \varphi$$

Es bleibt zu zeigen, daß (X_φ, p, f, y) maximal ist.

Sei (Z, q, g, z) eine beliebige analytische Fortsetzung von φ.

Man definiert $r : Z \longrightarrow |\mathcal{O}_X|$ durch $r(\zeta) = q_*(\rho_\zeta(g)) \in \mathcal{O}_{X,q(\zeta)}$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[r, dashed, "r"] \arrow[dr, "q"'] & X_\varphi \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C} \\ & X & \end{tikzcd}$$

- $r(z) = q_*(\rho_z(g)) = \varphi = y$ ✓
- $p \circ r = q$: $p(r(\zeta)) = p(\text{ein Keim in } \mathcal{O}_{X,q(\zeta)}) = q(\zeta)$. ✓
- $f \circ r = g$: $f(q_*(\rho_\zeta(g))) =$ Wert des Keimes $q_*(\rho_\zeta(g)) = g(\zeta)$ ✓
- r stetig ($\Rightarrow$ holomorph) :

$\coprod_{x\in U} \{\rho_x(h)\}$

Sei $U(h) \subset |\mathcal{O}_X|$ eine Umgebung von $r(\zeta) = q_*(\rho_\zeta(g))$,
d.h. $r(\zeta) = [U, h]$.

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[rr, dashed, "r"] & & U(h) \arrow[dl, "p", "\cong"'] \\ \zeta \in V \arrow[r, "q"', "\cong"] & U & \end{tikzcd}$$

q lokal Homöomorphismus $\Rightarrow$ wir dürfen annehmen, es gibt $V \ni \zeta$ mit $q|_V : V \xrightarrow{\cong} U$.

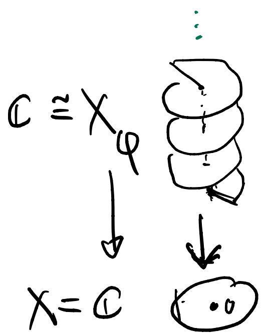
$\rho_{q(\zeta)}(g \circ q^{-1}) \overset{\text{Def}}{=} r(\zeta) = \rho_{q(\zeta)}(h) \Longrightarrow g = h \circ q$ auf einer Umgebung $V' \subset V$ von ζ.

$\Rightarrow$ für alle $\zeta' \in V'$, $r(\zeta') = \rho_{q(\zeta')}(g \circ q^{-1}) = \rho_{q(\zeta')}(h)$,
d.h. $r(V') \subset U(h)$.

- Da r stetig ist und Z zusammenhängend ist, ist $r(Z) \subset X_\varphi \subset |\mathcal{O}_X|$. $\square$

Beispiel. $\varphi = \rho_1(\log) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},1}$. Die maximale analytische Fortsetzung von φ ist $(\mathbb{C}, \exp, \mathrm{Id}, 0)$:

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{C} & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle p = \exp}\downarrow & & \\ \mathbb{C} & & \end{array}$$



$\exp_*(\rho_0(\mathrm{Id})) = \rho_1(\log)$ weil: $\exp^*(\rho_1(\log)) = \rho_0(\log \circ \exp) = \rho_0(\mathrm{Id})$.

Für jede andere analytische Fortsetzung (Z, q, g, z), das Dreieck

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \exp} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

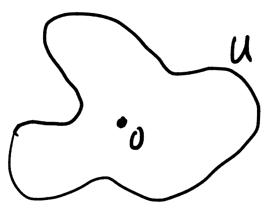
kommutiert, weil q und $\exp \circ g$ haben denselben Keim im Punkt z.

Bemerkungen

1) Man kann analytische Fortsetzung meromorpher Funktionskeime ganz analog behandeln. Insbesondere, jeder meromorphe Funktionskeim $\varphi \in \mathcal{M}_X$ hat eine maximale analytische Fortsetzung (X_φ, p, f, y), wobei $X_\varphi \subset |\mathcal{M}_X|$ die Z.h.-Komponente ist, in der φ liegt, und $f : |\mathcal{M}_X| \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

2) Im Allgemeinen, es kann sehr schwierig sein, X_φ konkret zu beschreiben.

z.B.



$\forall\, U \ni 0$ einfach z.h.
$\exists\, \varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$
mit $\mathbb{C}_\varphi = U$!

Kapitel 5: Algebraische Funktionen

Ziel: Sei $K = \mathcal{M}(X)$, X zusammenhängend

$$\left\{ \overset{\text{z.h.}}{\text{endlich verzweigte Überlagerungen }} Y \to X \right\} \longleftrightarrow \left\{ \text{end. Körpererweiterungen } L/K \right\}$$
$$Y \longmapsto \mathcal{M}(Y)$$

Unter einer „algebraischen Funktion" auf X, verstehen wir eine mehrdeutige Funktion $w = w(z)$, die einer Polynomgleichung genügt:

$$P(w) = w^n + a_1(z) w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \qquad (*)$$

wobei die Koeffizienten a_i meromorphe Funktionen sind.

Ein einfaches Beispiel ist die Wurzel $w = \sqrt[n]{z}$; sie ist eine mehrdeutige Funktion auf $\mathbb{C}$, die der Gleichung $w^n - z = 0$ genügt.

Im Allgemeinen, man kann der Gleichung $(*)$ eine kanonische n-blättrige verzweigte Überlagerung $\pi : Y \to X$ zuordnen, so daß
$$\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(X)[T]/(P(T))$$

Insbesondere hat die Gleichung $(*)$ eine Lösung $w \in \mathcal{M}(Y)$, die man als mehrdeutige Funktion auf X auffassen kann.

<u>Erinnerung</u>: Eine endliche verzweigte Überlagerung $\pi : Y \to X$ ist eine nirgends konstant eigentliche holomorphe Abbildung.

Die Menge der kritischen Werte $K = \{\pi(y) : v(\pi, y) \geq 2\}$ ist lokal endlich ($\equiv$ abgeschlossen und diskret), und wenn $X' = X \setminus K$, $Y' = Y \setminus \pi^{-1}(K)$, dann ist $\pi|_{Y'} : Y' \to X'$ eine endliche Überlagerung.

Außerdem gibt es eine wohldefinierte Abbildung $\pi^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$, $\pi^*(f) = f \circ \pi$, weil $\pi^{-1}(\text{Polstellenmenge})$ lokal endlich ist.

Konstruktion.

Sei $\pi : Y \to X$ eine n-blättrige verzweigte Überlagerung und $f \in \mathcal{M}(Y)$.
Wir konstruieren n meromorphe Funktionen $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$, die **elementarsymmetrischen Funktionen** von f bzgl. π, so daß

$$f^n + \pi^*(c_1) f^{n-1} + \dots + \pi^*(c_{n-1}) \cdot f + \pi^*(c_n) = 0.$$

Außerdem: ist $f \in \mathcal{O}(Y)$, so sind $c_i \in \mathcal{O}(X)$.

1. Fall: π ist die triviale Überlagerung: $\pi : Y = \coprod_{i=1}^{n} X \to X$.

$$\begin{array}{c} \equiv\; Y \\ \downarrow \\ \underline{}\; X. \end{array}$$

$$\mathcal{M}(Y) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}(X)$$

und $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{M}(X)$.

Wir definieren $c_i \in \mathcal{M}(X)$ durch:

$$\prod_{i=1}^{n} (T - f_i) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

$$\Big(c_i = (-1)^i \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_i \le n} f_{k_1} \cdots f_{k_i} \Big).$$

2. Fall: $\pi : Y \to X$ ist eine Überlagerung (unverzweigt)

Sei $U \subset X$ eine off. Teilmenge, so daß $\pi^{-1}(U) \overset{\varphi}{\cong} \coprod_{i=1}^{n} U$ über U

$$f|_{\pi^{-1}(U)} \circ \varphi = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{M}\Big(\coprod_{i=1}^{n} U\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{M}(U).$$

$\rightsquigarrow$ $c_1^{(U,\varphi)}, \dots, c_n^{(U,\varphi)} \in \mathcal{M}(U)$ wie im ersten Fall.

1) $V \subset U \rightsquigarrow c_i^{(V, \varphi|_V)} = c_i^{(U,\varphi)}|_V$ (klar).

2) $c_i^{(U,\varphi)}$ hängt nicht von φ ab:

o.B.d.A, nach 1), dürfen wir annehmen, daß U zsh. ist

Sei $\psi : \pi^{-1}(U) \cong \coprod_{i=1}^{n} U$ ein anderer Homöomorphismus über U

Dann $f|_{\pi^{-1}(U)} \circ \psi = (f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)})$ mit einem $\sigma \in S_n$

$\Longrightarrow c_i^{(U,\varphi)} = c_i^{(U,\psi)} =: c_i^U$

Nach 1), $c_i^U|_{U\cap U'} = c_i^{U'}|_{U\cap U'}$

$\underset{\mathcal{M}\text{ Garbe}}{\Longrightarrow}$ $\exists!\ c_i \in \mathcal{M}(X)$ mit $c_i|_U = c_i^U$ für jede U, über die π trivial ist.

Folgende Satz macht die Konstruktion fertig im allgemeinen Fall:

<u>Satz</u>. Sei $\pi: Y \to X$ eine n-blättrige verzweigte Überlagerung, $K \subset X$ eine lokal endliche Teilmenge, $X' = X \setminus K$, $Y' = Y \setminus \pi^{-1}(K)$, so daß $\pi|_{Y'}: Y' \to X'$ unverzweigt ist (d.h. K enthält die kritischen Werte von π).
Sei $f \in \mathcal{M}(Y')$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X')$ ihre elementarsymmetrischen Funktionen.
Dann:

f läßt sich meromorph (holomorph) nach Y fortsetzen

$\Longleftrightarrow$ $c_1, \dots, c_n$ lassen sich meromorph (holomorph) nach X fortsetzen.

<u>Bemerkung</u>. Die Gleichung $f^n + \pi^*(c_1)f^{n-1} + \dots + \pi^*(c_n) = 0$ gilt dann auf ganz Y, wegen Stetigkeit.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\pi"] & \\ X' \arrow[r, hook] & X & K \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

- $f \in \mathcal{O}(Y')$.

  Sei $a \in K$, $\pi^{-1}(a) = \{b_1, \dots, b_m\}$

  Sei U eine off. Umgebung von a, so daß $\overline{U}$ kompakt ist und $\overline{U} \cap K = \{a\}$

  und $V = \pi^{-1}(U)$.

  Da π eigentlich ist, ist $\overline{V}$ kompakt.

  f läßt sich über $b_1, \dots, b_m$ holomorph fortsetzen

  $\Longleftrightarrow$ $f|_{V \setminus \{b_1, \dots, b_m\}}$ ist beschränkt

  $\Longleftrightarrow$ alle c_i sind auf $U \setminus \{a\}$ beschränkt.

  $\Longleftrightarrow$ alle c_i lassen sich über a holomorph fortsetzen.

• $f \in \mathcal{M}(Y')$. Sei U, V wie oben, und $z: U \xrightarrow{\cong} D \subset \mathbb{C}$ eine Karte mit $z(a) = 0$.

f läßt sich über $b_1, \dots, b_m$ meromorph fortsetzen

$\iff \exists\, k \gg 0$, $\pi^*(z)^k \cdot f$ ist über $b_1, \dots, b_m$ holomorph fortsetzbar

$\iff \exists\, k$, $z^{ki} \cdot c_i$ sind über a holomorph fortsetzbar

die elementar-symmetrischen Funktionen von $\pi^*(z)^k \cdot f$ sind $z^{ki} \cdot c_i$

$\iff$ alle c_i sind über a meromorph fortsetzbar. $\square$

<u>Korollar</u> Wenn X und Y zusammenhängend sind, dann ist $\pi^*: \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ eine algebraische Körpererweiterung vom Grad $\leq n$.

Falls ein $f \in \mathcal{M}(Y)$ und ein $x \in X$ existieren, so daß $f(\pi^{-1}(x))$ aus n verschiedenen Punkten aus $\mathbb{C}$ besteht, dann ist $[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] = n$.

<u>Bemerkung</u>: Man kann zeigen, daß eine solche Funktion f immer existiert, aber das ist sehr schwierig.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der folgenden:

Sei L/K eine separable algebraische Körpererweiterung, so daß jedes $f \in L$ ein Minimalpolynom vom Grad $\leq n$ hat. Dann ist $[L : K] \leq n$.

Sei $f_0 \in L$ mit einem Minimalpolynom vom maximalen Grad $n_0 \leq n$.

<u>Behauptung</u>: $L = K(f_0)$.

Sei $f \in L$. Nach dem Satz vom primitiven Element gibt es ein $g \in L$ mit $K(f_0, f) = K(g)$

Dann $\quad [K(g) : K] \leq n_0 \qquad [K(g) : K] \geq [K(f_0) : K] = n_0$

$\Rightarrow \quad K(g) = K(f_0)$, d.h. $f \in K(f_0)$, wie behauptet.

Zweite Aussage: Sei $P(T) = T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_m \in \mathcal{M}(X)[T]$ mit $P(f) = 0$

Die Werte $f(y)$ für $y \in \pi^{-1}(x)$ sind dann Lösungen der Gleichung

$T^m + a_1(x) T^{m-1} + \dots + a_m(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad m \geq n.$ $\square$

Y/X eine z.h. n-blättrige verzweigte Überlagerung $\rightsquigarrow$ Körpererweiterung $\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X)$ vom Grad $(\leq) n$.

Ziel: für eine endliche Körpererweiterung $L/\mathcal{M}(X)$, eine verzweigte Überlagerung $\pi: Y \to X$ zu konstruieren, so daß $\mathcal{M}(Y) \cong L$.

<u>Satz</u> (Fortsetzung von verzweigten Überlagerungen)

Sei X eine Riemannsche Fläche, $K \subset X$ lokal endliche Teilmenge, $X' = X \setminus K$, und $\pi': Y' \to X'$ eine n-blättrige verzweigte Überlagerung.

Dann existiert eine n-blättrige verzweigte Überlagerung $\pi: Y \to X$ mit einem Isomorphismus $\pi^{-1}(X') \cong Y'$ über X'

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(X') \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\pi|_{\dots}"'] & & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

Außerdem ist π eindeutig bis auf Isomorphie (über X und unter Y').

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi'"'] & \exists Y \arrow[d, "\pi"] \\ X' \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

<u>Beispiel</u> (hyperelliptische Kurven).

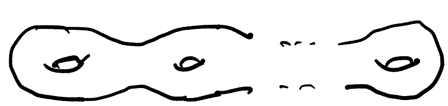
Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein monisches separables Polynom, und

$$X = Z(w^2 - p(z)) \subset \mathbb{C}^2$$

Die Projektion $\pi': X \to \mathbb{C}$ ist eine 2-blättrige verzweigte Überlagerung.
$$(z,w) \mapsto w$$

$\Rightarrow \quad \exists! \quad \pi: \overline{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ verzweigte Überlagerung

$\overline{X}$ ist eine kompakte Riemannsche Fläche.

Man kann zeigen: $\overline{X} \cong$  mit g Löcher,

wobei $g = \left\lfloor \frac{\mathrm{Grad}(p) - 1}{2} \right\rfloor$

Grad p	g
3	1
4	1
5	2
6	2
...	...

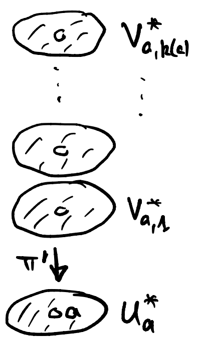
Beweis. o.B.d.A., $\pi' : Y' \to X'$ ist unverzweigt.

Für jeden $a \in K$, wählen wir eine Karte $z_a : U_a \xrightarrow{\cong} D \subset \mathbb{C}$ mit $z_a(a) = 0$ und $U_a \cap U_{a'} = \emptyset$ für $a \neq a'$.

Sei $U_a^* = U_a \setminus \{a\}$

π' ist eigentlich $\Longrightarrow$ $(\pi')^{-1}(U_a^*) = V^*_{a,1} \sqcup \cdots \sqcup V^*_{a,k(a)}$,

$V^*_{a,i}$ zusammenhängend



$\pi'|_{V^*_{a,i}} : V^*_{a,i} \longrightarrow U^*_a$ ist eine endliche z.h. Überlagerung.

Nach der Klassifikation von z.h. Überlagerungen ($\longleftrightarrow$ Untergruppen von $\pi_1(D^*) \cong \mathbb{Z}$) gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd} V^*_{a,i} \arrow[r, "\cong", "w_{a,i}"'] \arrow[d, "\pi'"'] & D^* \arrow[d] & z \arrow[d, mapsto] \\ U^*_a \arrow[r, "\cong", "z_a"'] & D^* & z^{n(a,i)} \end{tikzcd}$$

mit $\sum_{i=1}^{k(a)} n(a,i) = n$.

Wir füllen jetzt die Löcher in allen $V^*_{a,i} \cong D^*$:

Sei $Y = Y' \cup \{ b_{a,i} : a \in K,\ i = 1, \dots, k(a) \}$

und $\pi : Y \to X$ die Fortsetzung von π' mit $\pi(b_{a,i}) = a$.

Wir definieren auf Y eine komplexe Struktur, so daß

$$w_{a,i} : V_{a,i} := V^*_{a,i} \cup \{b_{a,i}\} \xrightarrow{\cong} D, \quad w_{a,i}(b_{a,i}) = 0$$

eine Karte ist.

Denn $\pi|_{V_{a,i}} : V_{a,i} \longrightarrow U_a$ ist holomorph und eigentlich, weil folgendes Quadrat kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V_{a,i} \arrow[r, "\cong", "w_{a,i}"'] \arrow[d, "\pi"'] & D \arrow[d] & z \arrow[d, mapsto] \\ U_a \arrow[r, "\cong", "z_a"'] & D. & z^{n(a,i)} \end{tikzcd}$$

und $z \mapsto z^{n(a,i)}$ ist holomorph und eigentlich.

$\Rightarrow \pi: Y \to X$ ist eine verzweigte Überlagerung.

Die Eindeutigkeit folgt aus dem folgenden Satz. $\square$

Satz. (Fortsetzung von Morphismen zwischen Überlagerungen)

Seien $\pi: Y \to X$, $\rho: Z \to X$ verzweigte Überlagerungen, $K \subset X$ eine lokal endliche Teilmenge, $X' = X \setminus K$, $Y' = Y \setminus \pi^{-1}(K)$, $Z' = Z \setminus \rho^{-1}(K)$.

Dann kann jede holomorphe Abbildung $\sigma': Y' \to Z'$ über X' zu einer eindeutigen holomorphen Abbildung $\sigma: Y \to Z$ über X fortgesetzt werden.

Insbesondere ist $\mathrm{Deck}(Y/X) \longrightarrow \mathrm{Deck}(Y'/X')$ ein Isomorphismus.
$$\sigma \longmapsto \sigma|_{Y'}$$

Lemma Sei $D \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe und $\pi: E \to D$ eine verzweigte Überlagerung mit E zusammenhängend, so daß
$$E \setminus \pi^{-1}(0) \longrightarrow D^*$$ unverzweigt ist.

Dann gibt es einen $k \geq 1$ und einen Biholomorphismus $E \cong D$, so daß

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & D \arrow[d, "z^k"', "z"] \\ & D \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Aufgabe 9.1.

Beweis des Satzes. Eindeutigkeit ist klar, weil $\pi^{-1}(K)$ lokal endlich ist.

Sei $a \in K$, $z: U \xrightarrow{\cong} D \subset \mathbb{C}$ eine Karte mit $z(a) = 0$, $U^* = U \setminus \{a\}$.

Wir dürfen annehmen, π und ρ über U^* unverzweigt sind:

$$\pi^{-1}(U^*) = V_1^* \amalg \cdots \amalg V_n^* \quad , \quad V_i^* \cong D^*$$
$$\rho^{-1}(U^*) = W_1^* \amalg \cdots \amalg W_m^* \quad , \quad W_j^* \cong D^* .$$

Nach dem Lemma haben wir: $\pi^{-1}(U) = V_1 \amalg \cdots \amalg V_n$ und $V_i \cong D$ und $\pi|_{V_i} \sim z^{k_i}$
$\rho^{-1}(U) = W_1 \amalg \cdots \amalg W_m$ und $W_j \cong D$ und $\rho|_{W_j} \sim z^{l_j}$

und man kann $\sigma'|_{V_i^*}: V_i^* \longrightarrow W_j^*$ zu einer stetigen Abbildung $V_i \to W_j$ fortsetzen. $\square$

Definition. Eine verzweigte Überlagerung $\pi : Y \to X$ heißt Galoissch, wenn die Überlagerung $\pi|_{Y'} : Y' \to X'$ Galoissch ist, wobei $X' = X \setminus \{\text{kritischen Werte von } \pi\}$, $Y' = \pi^{-1}(X')$.

Nach dem Satz, π ist genau dann Galoissch, wenn die Deckgruppe $\mathrm{Deck}(Y/X)$ auf jeder nicht-kritischen Faser $\pi^{-1}(x)$, $x \in X'$, transitiv operiert.

Satz (Existenz von algebraischen Funktionen)

Sei X eine z.h. R.F. und

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

ein separables Polynom. Dann gibt es eine n-blättrige verzweigte Überlagerung $\pi : Y \to X$ und eine meromorphe Funktion $F \in \mathcal{M}(Y)$ mit $\pi^*(P)(F) = 0$.

Das Tripel (Y, π, F) ist eindeutig im folgenden Sinn: ist (Z, ρ, G) ein anderes solches Tripel, so gibt es genau einen Biholomorphismus $\sigma : Z \xrightarrow{\cong} Y$ über X mit $G = F \circ \sigma$.

Außerdem: $\mathcal{M}(Y) \cong \mathcal{M}(X)[T]/(P(T))$.

Beweis.

Sei $\Delta \in \mathcal{M}(X)^*$ die Diskriminante von $P(T)$. $\Delta_n(1, c_1, \ldots, c_n)$

(Erinnerung: die Diskriminante für Polynome vom Grad n ist ein kanonisches Polynom $\Delta_n \in \mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_n]$ mit folgender Eigenschaft: Sei K ein Körper und $p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \in K[t]$. Dann: $p(t)$ ist separabel $\iff$ $\Delta_n(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$.

(z.B. $\Delta_2 = a_1^2 - 4a_0 a_2$))

Sei K die Vereinigung der Polstellenmenge von $c_1, \dots, c_n$ und der Nullstellenmenge von Δ

$\Rightarrow K \subset X$ lokal endlich. Sei $X' = X \setminus K$.

Für jeden $x \in X'$, das Polynom

$$P_x(T) := T^n + c_1(x) T^{n-1} + \dots + c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

ist separabel, weil $\Delta_n(P_x) = \Delta(x) \neq 0$.

Aufgabe 8.3: Sei $Y' \subset |\mathcal{O}_{X'}|$ die Menge aller Keime φ auf X' mit $P(\varphi) = 0$. Denn ist $\pi' : Y' \to X'$ eine n-blättrige Überlagerung.

Sei $F : Y' \to \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion

$$F(\varphi) = \text{der Wert von } \varphi$$

(vgl. die maximale analytische Fortsetzung)

Nach Konstruktion gilt

$$F(y)^n + c_1(\pi'(y)) \cdot F(y)^{n-1} + \dots + c_n(\pi'(y)) = 0$$

für alle $y \in Y'$.

Sei $\pi : Y \to X$ die Fortsetzung von $\pi' : Y' \to X'$.

Da $c_1, \dots, c_n$ sich nach X meromorph fortsetzen lassen, läßt sich F nach Y meromorph fortsetzen.

$\Rightarrow (Y, \pi, F)$ ist das gewünschte Tripel.

- Der Ringhomomorphismus
$$\mathcal{M}(X)[T]/(P(T)) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$
$$T \longmapsto F$$
ist ein Isomorphismus, weil
$$[\mathcal{M}(X)[T]/(P(T)) : \mathcal{M}(X)] = n$$
$$[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] \leq n.$$

Zur <u>Eindeutigkeit</u>: Sei (Z, ρ, G) ein anderes Tripel.

Wir suchen
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\sigma", "\cong"'] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$
mit $G = F\circ\sigma$.

Sei $K_1 = K \cup \rho\left(\{\text{Polstellen von } G\} \cup \{\text{Verzweigungspunkte von } \rho\}\right) \subset X$

$X_1 = X \setminus K_1$, $Y_1 = Y \setminus \pi^{-1}(K_1)$, $Z_1 = Z \setminus \rho^{-1}(K_1)$.

Man definiert $\sigma_1 : Z_1 \longrightarrow |\mathcal{O}_{X_1}|$, $\sigma_1(z) = \rho_*(\rho_z(G))$

$P(G) = 0 \Rightarrow P(\sigma_1(z)) = 0$ d.h.
$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[rr, "\sigma_1"] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dl] \\ & X_1 & \end{tikzcd}$$

Wie im Beweis der maximalen analytischen Fortsetzung, ist σ_1 stetig, und $G|_{Z_1} = F|_{Y_1} \circ \sigma_1$.

Z_1 und Y_1 sind Überlagerungen von X_1 mit derselben Blätterzahl n

$\Rightarrow$ σ_1 ist eine Überlagerung mit Blätterzahl 1, d.h. σ_1 ist biholomorph.

Nach vorherigem Satz, kann man σ_1 zu einem eindeutigen Biholomorphismus $\sigma : Z \longrightarrow Y$ über X fortsetzen, und dann $G = F\circ\sigma$. $\square$

<u>Satz</u>. Sei X eine z.h. RF, $K = \mathcal{M}(X)$, $P(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ ein irreduzibles Polynom, und $\pi : Y \to X$ die zugeordnete verzweigte Überlagerung, mit $\mathcal{M}(Y) \cong K[T]/(P(T)) =: L$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Deck}(Y/X) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(L/K) \\ \sigma &\longmapsto (\sigma^{-1})^* : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(Y) \\ & \qquad\qquad\qquad f \mapsto f\circ\sigma^{-1} \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus. Außerdem:

Y/X ist Galoisch $\Longleftrightarrow$ L/K ist Galoisch.

Beweis. Gruppenhomomorphismus: $((\sigma\tau)^{-1})^* = (\tau^{-1}\sigma^{-1})^* = (\sigma^{-1})^*(\tau^{-1})^*$

Sei $F \in \mathcal{M}(Y)$ mit $[T]$ in $K[T]/(P(T)) \cong \mathcal{M}(Y)$.

Dann das Tripel (Y, π, F) ist wie im letzten Satz bzgl. $P(T)$.

Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$. Dann $(Y, \pi, \alpha(F))$ ist auch ein solches Tripel, weil

$$P(\alpha(F)) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha|_{\mathcal{M}(X)} = \mathrm{Id}}}{=} \alpha(P(F)) = \alpha(0) = 0.$$

Nach der Eindeutigkeitsaussage für solche Tripel, gibt es genau ein $\tau : Y \xrightarrow{\cong} Y$ mit $\alpha(F) = F \circ \tau = \tau^*(F)$.

Da $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(X)(F)$, stimmen α und τ^* überein.

Also $\alpha \mapsto \tau^{-1}$ ist die Umkehrabbildung von $\sigma \mapsto (\sigma^{-1})^*$.

- L/K Galoissch $\iff \# \mathrm{Aut}(L/K) = [L:K]$
  $\iff \# \mathrm{Deck}(Y/X) = $ Blätterzahl
  $\iff Y/X$ Galoissch. $\square$.

<u>Bemerkung</u>. Der Riemannsche Existenzsatz impliziert, daß

$[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] = n$ für jede n-blättrige verzweigte Überlagerung $\pi : Y \to X$

$\Rightarrow \exists\, F \in \mathcal{M}(Y)$ mit einem Minimalpolynom $P(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ vom Grad n

$\Rightarrow \pi : Y \to X$ ist dem Polynom $P(T)$ zugeordnete verzweigte Überlagerung, und daher

$$\mathrm{Deck}(Y/X) \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)/\mathcal{M}(X))$$

Es folgt eine Äquivalenz von Kategorien:

$$\{\text{zsh. verzweigte Überlagerungen von } X\} \cong \{\text{endliche Körpererweiterungen von } \mathcal{M}(X)\}$$