Kapitel 6. Differentialformen und Integration

X eine Riemannsche Fläche $\rightsquigarrow$ $\mathcal{O}(X)$ holomorphe Funktionen
$\cap$
$\mathcal{E}(X)$ glatte Funktionen

Seien x, y die üblichen reellen Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.
$z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$ (nicht holomorph!)

$\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathcal{E}(U) \xrightarrow{D} \mathcal{E}(U)$ mit $D(fg) = fD(g) + gD(f)$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Es gibt verschiedene Differentialoperatoren auf der $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{E}(U)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

<u>Bemerkung</u>.
- $f \in \mathcal{E}(U)$ ist holomorph $\iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (Cauchy-Riemannsche Gleichungen)
  In diesem Fall, $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.
- $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$
- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}$.

Sei $z = x + iy : U \xrightarrow{\cong} V \subset \mathbb{C}$ eine Karte auf X

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$$

und $\mathcal{O}(U) = \mathrm{Ker}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$

<u>Erinnerung</u>: Für alle $a \in X$, die Halme $\mathcal{E}_a$ und $\mathcal{O}_a$ sind lokale Ringe, deren maximale Ideale aus allen Funktionen bestehen, die im Punkt a verschwinden:

Sei $\mathfrak{m}_a = \{\varphi \in \mathcal{E}_a \mid \varphi(a) = 0\} \subset \mathcal{E}_a$ das maximale Ideal

Definition Der (komplexe) Kotangentialraum im Punkt a ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$T_a^{(1)}X := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2 .$$

Sei $f \in \mathcal{E}(U)$ eine Funktion auf einer Umgebung U von a. Das Differential von f im Punkt a ist

$$d_a f := \underbrace{\rho_a\big(f - f(a)\big)}_{\in \mathfrak{m}_a} \bmod \mathfrak{m}_a^2 \in T_a^{(1)} X$$

Funktionskeime, die von zweiter Ordnung verschwinden.

Satz.

- $\dim_{\mathbb{C}} T_a^{(1)} X = 2$
- Ist $z = x + iy : U \to \mathbb{C}$ eine Karte um a, so sind $(d_a x, d_a y)$ und $(d_a z, d_a \bar{z})$ zwei Basen von $T_a^{(1)} X$.
- Ist $f \in \mathcal{E}(U)$, so gilt:
$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, d_a y$$
und
$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\, d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\, d_a \bar{z}$$
- Die Unterräume $\mathbb{C}\cdot d_a z$ und $\mathbb{C}\cdot d_a \bar{z}$ von $T_a^{(1)}(X)$ sind unabhängig von der Karte z.

Beweis.
$$z = x + iy \Rightarrow d_a z = d_a x + i\, d_a y$$
$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow d_a \bar{z} = d_a x - i\, d_a y$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\left(\det = -2i \in \mathbb{C}^*\right)$.

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $(d_a x, d_a y)$ eine Basis ist.

- $T_a^{(1)}X$ ist von $d_a x$ und $d_a y$ erzeugt.

Jedes $\omega \in T_a^{(1)}X$ ist von der Gestalt $d_a f$.

Da f glatt ist, erhalten wir durch Taylorentwicklung

$$f = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y(a)) + g$$

wobei $g \in m_a^2$.

$$\rightsquigarrow \quad d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, d_a y \quad \text{in } T_a^{(1)}X$$

- $d_a x$ und $d_a y$ sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig!

$$c_x d_a x + c_y d_a y = 0 \implies c_x(x - x(a)) + c_y(y - y(a)) \in m_a^2$$

$$\implies \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\cdots)}_{= c_x} \in m_a \text{ und } \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\cdots)}_{= c_y} \in m_a \implies c_x = c_y = 0.$$

- Seien $z, z' : U \longrightarrow \mathbb{C}$ zwei Karten um a. Denn:

$$z' \text{ ist holomorph} \implies \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = 0$$

Daher
$$d_a z' = \frac{\partial z'}{\partial z}(a) \cdot d_a z + \frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(a)\, d_a \bar{z} = \frac{\partial z'}{\partial z}(a)\, d_a z$$

$$\implies \mathbb{C} \cdot d_a z = \mathbb{C} d_a z'. \quad \text{Ebenso } \mathbb{C} d_a \bar{z} = \mathbb{C} d_a \bar{z}'. \qquad \square$$

Definition

$$T_a^{1,0}X := \mathbb{C} \cdot d_a z \subset T_a^{(1)}X$$
$$T_a^{0,1}X := \mathbb{C}\, d_a \bar{z} \subset T_a^{(1)}X \qquad \implies T_a^{(1)}X = T_a^{1,0}X \oplus T_a^{0,1}X.$$

(z eine beliebige Karte um a).

Elemente von $T_a^{i,j}X$ heißen Kotangentialvektoren vom Typ (i,j).

Für $f \in \mathcal{E}(U)$, $\partial_a f \in T_a^{1,0}X$ und $\bar{\partial}_a f \in T_a^{0,1}X$ sind die einzigen Elemente, so daß $d_a f = \partial_a f + \bar{\partial}_a f$.

Definition Sei X eine Riemannsche Fläche.
Eine Differentialform erster Ordnung (oder 1-Form) auf X ist eine Abbildung

$$\omega : X \longrightarrow \coprod_{a\in X} T_a^{(1)}X \quad \text{mit} \quad \omega(a) \in T_a^{(1)}X \text{ für alle } a \in X.$$

- ω heißt vom Typ (i,j), falls $\omega : X \to \coprod_{a\in X} T_a^{i,j}X$.

Beispiel: $f \in \mathcal{E}(X) \Rightarrow df : a \mapsto d_a f$, ebenso ∂f und $\bar\partial f$.

Bemerkung:

- $f \in \mathcal{E}(X)$ ist holomorph $\Longleftrightarrow$ $\bar\partial f = 0$.
- Ist $z = x+iy : U \to \mathbb{C}$ eine Karte und ω eine Diff'form 1 Ordnung auf X, so kann man ω darstellen als
$$\omega|_U = f\,dx + g\,dy = h\,dz + k\,d\bar z$$
für eindeutige Funktionen $f,g,h,k : U \to \mathbb{C}$.

Definition Eine Diff'form 1. Ordnung heißt glatt (bzw holomorph), wenn für jede Karte $z : U \to \mathbb{C}$ auf X gilt:

$$\omega|_U = f\,dx + g\,dy \quad \text{mit } f,g \in \mathcal{E}(U)$$

$$\left(\text{bzw. } \omega|_U = f\,dz \quad \text{mit } f \in \mathcal{O}(U)\right).$$

Notation: $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ = glatte Diff'formen 1. Ordnung auf X.
$\cup$
$\mathcal{E}^{i,j}(X)$ = ———————— vom Typ (i,j)

$\Omega^1(X) = \Omega(X)$ = holomorphe Diff'formen auf X.

$$\mathcal{E}^{(1)}(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(X)$$
$$\cup$$
$$\Omega(X)$$

Bemerkung: $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{i,j}, \Omega$ sind Garben auf X.

Das Residuum

Sei X eine Riemannsche Fläche, $a \in X$, $\omega \in \Omega(X \setminus \{a\})$.

Das Residuum $\mathrm{Res}_a(\omega)$ wird wie folgt definiert:

Sei (U, z) eine Karte mit $z(a) = 0$. ω lässt sich als $\omega = f\,dz$ darstellen mit $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Sei

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f um a. Dann

$$\mathrm{Res}_a(\omega) := c_{-1} \in \mathbb{C}.$$

Behauptung: $\mathrm{Res}_a(\omega)$ hängt nicht von der Karte (U, z) ab.

Beweis. Sei $g = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ $\qquad d(z^{n+1}) = (n+1) z^n \, dz$

$$\Rightarrow \omega|_{U \setminus \{a\}} = f\,dz = dg + c_{-1} \frac{dz}{z}$$

Es genügt zu zeigen, dass folgendes gilt unabhängig von der Karte:

1) $\mathrm{Res}_a(dg) = 0$

2) $\mathrm{Res}_a\left(\frac{dg}{g}\right) = 1$, falls $\mathrm{ord}_a(g) = 1$.

1) $g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow dg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n z^{n-1} dz$

– der Koeffizient von z^{-1} ist null.

2) $g = z \cdot h$ mit $h(a) \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{dg}{g} = \frac{h\,dz + z \cdot dh}{z \cdot h} = \frac{dz}{z} + \underbrace{\frac{dh}{h}}$$

holomorph im Punkt a $\Rightarrow \mathrm{Res}_a\left(\frac{dh}{h}\right) = 0$

$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{dg}{g}\right) = \mathrm{Res}_a\left(\frac{dz}{z}\right) = 1. \qquad \square$$

Bemerkung. In der Funktionentheorie betrachtet man das Residuum holomorpher Funktionen:

$$\mathrm{Res}_a(f), \quad f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\}), \qquad U \subset \mathbb{C}.$$

Aber das ist nicht invariant gegenüber Biholomorphismen $V \xrightarrow[\varphi]{\cong} U$. Deswegen macht $\mathrm{Res}_a(f)$ keinen Sinn, wenn f eine Funktion auf einer Riemannschen Fläche ist.

Definition. Eine meromorphe Differentialform auf X besteht aus:

- einer lokal endlichen Teilmenge $P \subset X$
- einer holomorphen Diff'form $\omega \in \Omega(X \setminus P)$

so daß jeder Punkt $a \in P$ eine Polstelle von ω ist. (siehe Aufgabe 10.1)

Die Menge aller auf X meromorphen Diff'formen wird mit $\mathcal{M}^{(1)}(X)$ bezeichnet. ($\mathcal{M}^{(1)}$ ist eine Garbe.)

Äußere Potenzen: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K (oder ein Modul über einem kommutativen Ring).

Die n-te äußere Potenz von V ist:

erzeugter Unterraum

$$\Lambda^n_K V := V^{\otimes n} / \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n : \exists\, i \neq j \;\; v_i = v_j \rangle \qquad \begin{pmatrix} \Lambda^0 V = K \\ \Lambda^1 V = V \end{pmatrix}$$

Das Bild von $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ in $\Lambda^n V$ wird mit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ bezeichnet.

Ist $\{e_1, \ldots, e_d\}$ eine Basis von V, dann ist

$$\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n \}$$

eine Basis von $\Lambda^n V$. Insbesondere

$$\dim_K V = d \implies \dim_K \Lambda^n V = \binom{d}{n}$$

und $\Lambda^n V = 0$ wenn $n > d$.

Das Dachprodukt $\wedge: V \times V \to \Lambda^2 V$ hat folgende Eigenschaften:

- Bilinearität: $(v_1 + v_2) \wedge w = (v_1 \wedge w) + (v_2 \wedge w)$
  $(\lambda v) \wedge w = \lambda (v \wedge w)$ für $\lambda \in K$.
- Antisymmetrie: $v \wedge w = -w \wedge v$
  (Beweis: $0 = (v+w) \wedge (v+w) = \dots = v \wedge w + w \wedge v$).

__Definition.__ Sei X eine R.F, $a \in X$:

$$T_a^{(2)} X := \Lambda^2_{\mathbb{C}} T_a^{(1)} X$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} T_a^{(2)} X = \binom{2}{2} = 1.$$

Sei (U, z) eine Karte um a.

$\{d_a x, d_a y\}$ ein Basis von $T_a^{(1)} X \Rightarrow \{d_a x \wedge d_a y\}$ eine Basis von $T_a^{(2)} X$

$\{d_a z, d_a \bar{z}\}$ ——————— $\Rightarrow \{d_a z \wedge d_a \bar{z}\}$ ———————

__Definition__ Eine Differentialform zweiter Ordnung auf X ist eine Abbildung

$$\omega : X \to \coprod_{a \in X} T_a^{(2)} X \quad \text{mit} \quad \omega(a) \in T_a^{(2)} X \quad \text{für alle } a \in X.$$

- ω heißt __glatt__, wenn für jede Karte (U, z) auf X gilt

$$\omega|_U = f \, dx \wedge dy \quad \text{mit} \quad f \in \mathcal{E}(U).$$

Der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller glatten 2-Formen auf X wird mit $\mathcal{E}^{(2)}(X)$ bezeichnet.

Es gibt ein Dachprodukt:

$$\wedge: \mathcal{E}^{(1)}(X) \times \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)$$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) = \omega_1(a) \wedge \omega_2(a) \in T_a^{(2)} X = \Lambda^2 T_a^{(1)} X.$$

Bemerkungen:

- $\dim_{\mathbb{C}} T_a^{(1)}X = 2 \Rightarrow \Lambda^n T_a^{(1)}X = 0$ für $n \geq 3$.
  Also es gibt keine Diff'formen höherer Ordnung.
  Aus demselben Grund gibt es keine holomorphe Diff'formen 2. Ordnung.

- $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ und $\mathcal{E}^{(2)}(X)$ sind Moduln über dem Ring $\mathcal{E}(X)$:
$$(f\omega)(a) := f(a)\,\omega(a).$$
  Das Dachprodukt $\wedge$ ist $\mathcal{E}(X)$-bilinear: $(f\omega_1)\wedge\omega_2 = f(\omega_1\wedge\omega_2)$.

Die de-Rham- und Dolbeault-Komplexe

$$\mathcal{E}^{(0)}(X) = \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d,\partial,\bar\partial} \mathcal{E}^{(1)}(X), \quad d = \partial + \bar\partial.$$

Definition $\quad d_a : T_a^{(1)}X \to T_a^{(2)}X \quad \rightsquigarrow \quad d: \mathcal{E}^{(1)}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}(X)$.

$$d_a\Big(\sum_i f_i\, dg_i\Big) := \sum_i d_a f_i \wedge d_a g_i$$

Wohldefiniert? In einer Karte (U,z) um a kann man schreiben
$$dg_i = \frac{\partial g_i}{\partial z}dz + \frac{\partial g_i}{\partial \bar z}d\bar z$$
$$\sum_i df_i \wedge dg_i = \underbrace{\sum_i\Big(\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial g_i}{\partial \bar z} - \frac{\partial f_i}{\partial \bar z}\frac{\partial g_i}{\partial z}\Big)}_{(*)} dz\wedge d\bar z.$$

Falls $\sum_i f_i\, dg_i = \sum_j \tilde f_j\, d\tilde g_j$, dann
$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big(\sum_i f_i \frac{\partial g_i}{\partial z} = \sum_j \tilde f_j \frac{\partial \tilde g_j}{\partial z}\Big) - \frac{\partial}{\partial \bar z}\Big(\text{und ebenso mit } \frac{\partial}{\partial \bar z}\Big).$$

$$\Rightarrow \quad (*) = \widetilde{(*)}.$$

Man definiert auch $\partial, \bar\partial : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)$ durch
$$\partial = d\circ\pi_{0,1} \quad \text{und} \quad \bar\partial = d\circ\pi_{1,0}$$
wobei $\pi_{i,j}$ die Projektionen auf die Summanden $\mathcal{E}^{i,j}(X) \subset \mathcal{E}^{(1)}(X)$.
Also $\partial|_{\mathcal{E}^{1,0}} = 0$ und $\bar\partial|_{\mathcal{E}^{0,1}} = 0$, und $d = \partial + \bar\partial$.

<u>Eigenschaften</u> (Aufgabe 10.3): $f \in \mathcal{E}(X)$, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$:

- $d^2 f = \partial^2 f = \bar\partial^2 f = 0$
- $df = \partial f + \bar\partial f$, $d\omega = \partial\omega + \bar\partial\omega$
- $\partial\bar\partial f = -\bar\partial\partial f$
- Leibniz-Regel: $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$ und ebenso mit ∂ und $\bar\partial$.

<u>Definition</u>: Eine Diff'form $\omega \in \mathcal{E}^{(*)}(X)$ heißt <u>geschlossen</u>, falls $d\omega = 0$.

$(\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{E})$ Sie heißt <u>exakt</u>, falls $\omega = d\nu$ mit einer $\nu \in \mathcal{E}^{(*-1)}(X)$.

$d^2 = 0 \iff$ exakte Formen sind geschlossen.

Im allgemeinen gilt die Umkehrung nicht.

<u>Satz</u>. $\Omega(X) = \mathcal{E}^{1,0}(X) \cap \operatorname{Ker}\left(d : \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(2)}(X)\right)$.

Beweis. Nach Definition ist $\Omega(X) \subseteq \mathcal{E}^{1,0}(X)$.

Sei $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$. Bzgl. einer Karte (U, z) kann man schreiben

$$\omega|_U = f\, dz \quad \text{mit } f \in \mathcal{E}(U).$$

Denn
$$d\omega|_U = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz.$$

Also, $d\omega = 0 \iff \bar\partial f = 0$, d.h. f ist holomorph. $\square$.

<u>Definition</u>. Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Eine Funktion $F \in \mathcal{E}(X)$ heißt <u>Stammfunktion</u> von ω, wenn $dF = \omega$.

<u>Bem</u>.
- $\exists$ Stammfunktion von $\omega \iff \omega$ ist exakt
- $\operatorname{Ker}\left(d : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X)\right) = \{\text{lokal konstante Funktionen auf } X\}$

Definition Der <u>de-Rham-Komplex</u> von X ist die Sequenz von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^{(0)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)}(X) \longrightarrow 0$$

Die <u>De-Rham-Kohomologie-Gruppen</u> von X sind:

$$H^i_{dR}(X,\mathbb{C}) = \operatorname{Ker}\left(d: \mathcal{E}^{(i)}(X) \to \mathcal{E}^{(i+1)}(X)\right) \Big/ \operatorname{Im}\left(d: \mathcal{E}^{(i-1)}(X) \to \mathcal{E}^{(i)}(X)\right)$$

Also: $$H^0_{dR}(X,\mathbb{C}) = \{\text{lokalkonstante Funktionen auf } X\} \cong \mathbb{C}^{\pi_0 X}$$

und $H^i_{dR}(X,\mathbb{C}) = 0$ wenn $i \neq 0,1,2$.

<u>Integration</u>.

Diff'formen 1. Ordnung können längs Wege integriert werden.
Diff'formen 2. Ordnung können über Flächen integriert werden.

Definition Sei X eine Riemannsche Fläche und $c: I \longrightarrow X$ ein stückweise C^1 Weg, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$.
Es gibt eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und Karten (U_k, z_k), so daß $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ und $c_k := z_k \circ c|_{[t_{k-1},t_k]}$ ist C^1.
Sei $\omega|_{U_k} = f_k\, dx_k + g_k\, dy_k$, wobei $z_k = x_k + i y_k$. Dann

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\underbrace{(f_k \circ c)(t)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{(x_k \circ c)'(t)}_{\in \mathbb{R}} + (g_k \circ c)(t) (y_k \circ c)'(t) \Big)\, dt \in \mathbb{C}$$

Folgende Eigenschaften werden leicht bewiesen:

$\tau: [0,1] \to [0,1]$ C^1, monoton wachsend und surjektiv.

- $\int_c \omega$ ist wohldefiniert, und invariant gegenüber C^1-Reparametrisierungen von c
- Für $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{E}(U)$, dann ist $\int_c f\,dz$ ist das Kurvenintegral von f über c im üblichen Sinn, d.h.
$$\int_0^1 f(c(t))\, c'(t)\, dt.$$ Außerdem $\int_c f\, d\bar{z} = \overline{\int_{\bar{c}} f(\bar{z})\, dz}$.

- Sei $\varphi : Y \to X$ ein Diffeomorphismus. Dann
$$\int_c \omega = \int_{c\circ\varphi^{-1}} \varphi^*(\omega) .$$

<u>Satz</u> $c : I \to X$ stückweise C^1 und $F \in \mathcal{E}(X)$. Dann
$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

Beweis. Sei $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ eine Unterteilung und (U_k, z_k) Karten wie in der Definition von $\int_c \omega$. Dann
$$dF|_{U_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k$$
$$\Longrightarrow \int_c dF = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t))\,(x_k\circ c)'(t) + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t))\,(y_k\circ c)'(t)\right) dt$$
$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F\circ c)'(t)\, dt$$
$$\overset{\text{Fundamentalsatz}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))\right) = F(c(1)) - F(c(0)). \quad \square$$

<u>Lemma</u>. Sei $D \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreisscheibe. Dann $H^1_{dR}(D, \mathbb{C}) = 0$, d.h. jede geschlossene 1-Form auf D hat eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $\omega = f\,dx + g\,dy$ geschlossen:
$$0 = d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Sei $\quad F: D \to \mathbb{C} \quad F(x,y) = \int_0^1 \left(f(tx,ty)x + g(tx,ty)y \right) dt$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \Big(f(tx,ty) + \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)tx + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{=\frac{\partial f}{\partial y}}(tx,ty)ty \Big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \Big(f(tx,ty) + t\frac{d}{dt} f(tx,ty) \Big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t\cdot f(tx,ty)\big)\, dt$$

$$= f(x,y).$$

Ebenso, $\frac{\partial F}{\partial y} = g \implies dF = \omega.$ $\square$.

<u>Satz</u> (Existenz von Stammfunktionen)

Sei X eine z.h. Riemannsche Fläche, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ geschlossen, $u: \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung. Dann $u^*(\omega) \in \mathcal{E}^{(1)}(\tilde{X})$ besitzt eine Stammfunktion.

Insbesondere, wenn X einfach z.h. ist, jede geschlossene 1-Form hat eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die Garbe der Stammfunktionen von ω:

$$\mathcal{F}(U) := \{ f \in \mathcal{E}(U) : df = \omega|_U \} \subset \mathcal{E}(U)$$

<u>Behauptung</u>: $p: |\mathcal{F}| \to X$ ist eine surjektive Überlagerung.

Nach dem Lemma, jeder Punkt $a \in X$ hat eine z.h. Umgebung U, so daß $\mathcal{F}(U) \neq \emptyset$. Sei $f \in \mathcal{F}(U)$. Dann

$$p^{-1}(U) = \coprod_{c \in \mathbb{C}} U(f+c)$$

$\uparrow \coprod_{x\in U} \{ \rho_x(f+c) \}$

Die Funktion $F: |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathbb{C}$, $F(\varphi) =$ der Wert von φ,

ist glatt und eine Stammfunktion von $p^*(\omega)$,

weil $F|_{U(f) \cong U} = f|_U$ für alle $f \in \mathcal{F}(U)$.

u universell $\Rightarrow$ $\exists\ \sigma: \tilde{X} \longrightarrow |\mathcal{F}|$ über X

$\Rightarrow$ $F \circ \sigma$ ist eine Stammfunktion von $u^*(\omega)$. $\square$.

__Beispiel:__ Jeder Zweig des Logarithmus auf $U \subset \mathbb{C}^*$ ist eine Stammfunktion von $\frac{dz}{z}$.

$\frac{dz}{z}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{C}^*$.

Aber $z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist eine Stammfunktion von $\exp^*\left(\frac{dz}{z}\right)$

(siehe Aufgabe 10.2(b)).

__Korollar__ Seien $c_0, c_1 : I \longrightarrow X$ zwei stückweise C^1 Wege, die __homotop__ sind.

Dann für jede geschlossene 1-Form $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$,

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega$$

Beweis. Sei $u: \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung,

und $\hat{c}_0, \hat{c}_1 : I \longrightarrow \tilde{X}$ Liftungen von c_0, c_1 mit $\hat{c}_0(0) = \hat{c}_1(0)$.

$\Rightarrow$ $\hat{c}_0 \simeq \hat{c}_1$, insbesondere $\hat{c}_0(1) = \hat{c}_1(1)$.

Nach Definition des Integrals gilt $\int_{c_0} \omega = \int_{\hat{c}_0} u^*(\omega)$

Sei F eine Stammfunktion von $u^*(\omega)$. Dann

$$\int_{c_0} \omega = F(\hat{c}_0(1)) - F(\hat{c}_0(0))$$

$$\shortparallel$$

$$F(\hat{c}_1(1)) - F(\hat{c}_1(0)) = \int_{c_1} \omega \qquad \square.$$

Definition Der Träger einer Diff'form $\omega \in \mathcal{E}^{(*)}(X)$ ist

$$\mathrm{Supp}(\omega) = \overline{\{a \in X : \omega(a) \neq 0\}}$$

Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ eine Diff'form 2. Ordnung mit kompakten Träger. (z.B. X kompakt).

Wir definieren $\int_X \omega$ wie folgt:

- Falls X eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, dann $\omega = f\, dx \wedge dy$ mit $f \in \mathcal{E}(X)$, und

$$\int_X \omega := \int_X f(x,y)\, dx dy \in \mathbb{C}$$

- Falls ein Biholomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\cong} X$ existiert mit $U \subset \mathbb{C}$ offen,

$$\int_X \omega := \int_U \varphi^*(\omega)$$

Wohldefiniert: Seien
$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "\varphi"'] & & V \arrow[dl, "\psi"] \\ & X & \end{tikzcd}, \quad U, V \subset \mathbb{C}$$

$$\chi = \varphi^{-1} \circ \psi : V \xrightarrow{\cong} U$$

Sei $\varphi^*(\omega) = f\, dx \wedge dy$

$$\rightarrow \int_U \varphi^*(\omega) = \int_U f\, dxdy \overset{\text{Transformationsregel}}{=} \int_V (f \circ \chi) \cdot |\det \mathcal{J}(\chi)|\, dxdy$$

Andererseits, $\psi^*(\omega) = \chi^*(f\, dx \wedge dy) = (f \circ \chi)\, \underbrace{d(x \circ \chi) \wedge d(y \circ \chi)}_{\det(\mathcal{J}(\chi))\, dx \wedge dy}$

χ biholomorph + Cauchy-Riemannsche Gleichungen

$$\Rightarrow \det(\mathcal{J}(\chi)) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \int_U \varphi^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega).$$

• Allgemeiner Fall: wir benutzen eine Zerlegung der Eins:

Supp(ω) ist kompakt $\Rightarrow$ $\exists$ Karten $(U_1, z_1), \ldots, (U_n, z_n)$ mit $\mathrm{Supp}(\omega) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$

[Zerlegung der Eins: $\exists$ glatte Funktionen $f_i : X \longrightarrow [0,1]$, so daß: $\mathrm{Supp}(f_i) \subset U_i$ und $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ für alle $x \in \mathrm{Supp}(\omega)$.

Dann $\omega = \sum_{i=1}^n f_i\omega$ und $\mathrm{Supp}(f_i\omega) \subset U_i$ und man definiert

$$\int_X \omega := \sum_{i=1}^n \int_{U_i} f_i\omega$$

(wohldefiniert ....)

Bmk: Nach Konstruktion, wenn $\varphi : Y \longrightarrow X$ ein Biholomorphismus ist,

$$\int_X \omega = \int_Y \varphi^*(\omega).$$

Lemma (Sonderfall des Satzes von Stokes)

Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ ein Diff'form 1 Ordnung mit kompaktem Träger. Dann

$$\int_X d\omega = 0.$$

Beweis. Durch eine Zerlegung der Eins kann man schreiben $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$, wobei $\mathrm{Supp}(\omega_i)$ in einer Karte enthalten ist.

$\Rightarrow$ oBdA, $X = \mathbb{C}$.

$$\omega = f\,dx + g\,dy \quad \text{und} \quad d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy$$

$$\mathrm{Supp}(f), \mathrm{Supp}(g) \subset \{z : |z| < R\}$$

$$\int_{\mathbb{C}} d\omega = \int_{|z|\le R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy \underset{\uparrow}{=} \int_{|z|=R} f\,dx + g\,dy = 0. \qquad \square$$

Satz von Green
(siehe z.B. Forster 10.19)

<u>Bemerkung</u> Wenn X kompakt ist, Integration induziert also einen Gruppenhomomorphismus

$$\int_X : \; H^2_{dR}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\quad \| $$
$$\mathcal{E}^{(2)}(X) / \mathrm{Im}(d)$$

Wenn X zh ist, die <u>Poincaré-Dualität</u> impliziert, dass $\int_X$ ein Isomorphismus ist.

Also, beide $H^0_{dR}(X, \mathbb{C})$ und $H^2_{dR}(X, \mathbb{C})$ sind kanonisch zu $\mathbb{C}$ isomorph.

Man kann zeigen, daß

$$H^1_{dR}\Big(\quad$$  $$, \mathbb{C}\Big) \cong \mathbb{C}^{2g}$$

mit g Löcher

z.B. $H^1_{dR}(\mathbb{C}/\Gamma, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$.

<u>Residuensatz</u>

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, und $a_1, \ldots, a_n \in X$ $(a_i \neq a_j)$

Sei $\omega \in \Omega(X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\})$. Dann

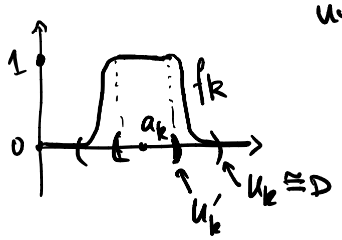
$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_k}(\omega) = 0.$$

Beweis. Wir wählen disjunkte Karten (U_k, z_k) um a_k,

mit $z_k(a_k) = 0$ und $z_k(U_k) = D \subset \mathbb{C}$,

und Funktionen $f_k \in \mathcal{E}(X)$ mit kompaktem Träger $\mathrm{Supp}(f_k) \subset U_k$,

so daß $f_k = 1$ auf einer Umgebung $U_k' \subset U_k$ von a_k.



Sei $g = 1 - (f_1 + \cdots + f_k) \in \mathcal{E}(X)$.

Dann $g|_{U_k'} = 0$ für alle $k = 1 \ldots n$.

$$\Longrightarrow \quad g\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$$

Nach dem Lemma, $\displaystyle\int_X d(g\omega) = 0$

ω holomorph $\Longrightarrow$ $d\omega = 0$ auf $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$

$$d(f_k\omega)\big|_{U_k' \setminus \{a_k\}} = 0 \qquad d(f_k\omega)\big|_{U_\ell \setminus \{a_\ell\}} = 0 \quad \text{für } \ell \neq k$$

Man kann $d(f_k\omega)$ über alle Punkte a_ℓ durch null fortsetzen

$\Longrightarrow$ $d(f_k\omega) \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ mit kompakten Träger $\subset U_k$.

Nun, $$d(g\omega) = \overset{\nearrow 0}{\cancel{d\omega}} - \sum_{k=1}^{n} d(f_k\omega) = -\sum_{k=1}^{n} d(f_k\omega)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \int_X d(g\omega) = -\sum_{k=1}^{n} \int_{U_k} d(f_k\omega).$$

Behauptung: $$\int_{U_k} d(f_k\omega) = -2\pi i \operatorname{Res}_{a_k}(\omega)$$

Man kann jetzt U_k durch D ersetzen:

- D' Umgebung von 0
- $f \in \mathcal{E}(D)$ mit kompakten Träger und $f|_{D'} = 1$
- $\omega = g\,dz$ mit $g \in \mathcal{O}(D^*)$.

Sei $\varepsilon > 0$, so dass $B(0,\varepsilon) \subset D'$. Dann

$$\int_D d(f\omega) = \int_{\overline{D} \setminus B(0,\varepsilon)} d(f\omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz von Green}}}{=} \overbrace{\int_{\partial D} f\omega}^{=0} - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f\omega = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} g\,dz$$

$$= -2\pi i \operatorname{Res}_0(g\,dz)$$

nach dem üblichen Residuensatz. $\square$

Beispiel: $\frac{dz}{z} \in \mathcal{M}^{(1)}(\mathbb{P}^1)$ mit Polstellen $0, \infty$.

$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{dz}{z}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Res}_\infty\left(\frac{dz}{z}\right) = -1.$$

Direkter Beweis: $$\varphi_\infty : \mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}, \quad w \longmapsto 1/w$$

$$(\varphi_\infty^{-1})^*\left(\frac{dz}{z}\right) = \frac{1}{z \circ \varphi_\infty^{-1}}\, d(z \circ \varphi_\infty^{-1}) = z \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) dz = -\frac{dz}{z}$$

Kapitel 7. Die erste Kohomologiegruppe einer Garbe (Forster §12 und 15)

Erinnerung (Kapitel 4)

Sei X ein topologischer Raum und

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

ein exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X.
Dann ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$$

exakt, aber β_X ist nicht unbedingt surjektiv.

Ziel: eine Gruppe $H^1(X, \mathcal{F})$ definieren, so daß folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^1(X, \mathcal{H})$$

(Die Sequenz geht noch weiter mit $\to H^2(X, \mathcal{F}) \to H^2(X, \mathcal{G}) \to \cdots$)

Definition Sei X ein top. Raum, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, und $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Für $n \geq 0$, die <u>n-te Kokettengruppe</u> von $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathfrak{U}$ ist

$$C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}) .$$

Die Elemente von $C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ heißen n-Koketten.
Man definiert die Randoperatoren / Ableitungsoperatoren

$$\delta : C^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

durch

$$\delta\Big((f_{i_0 \ldots i_n})_{(i_0 \ldots i_n) \in I^{n+1}} \Big)_{j_0, \ldots, j_{n+1}} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k f_{j_0, \ldots, \widehat{j_k}, \ldots, j_{n+1}} \Big|_{U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_{n+1}}}$$

$$\in \mathcal{F}(U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_{n+1}}) .$$

Lemma $\delta^2 = 0$, d.h. $(C^*(\mathcal{U},\mathcal{F}),\delta)$ ist ein Kokettenkomplex.

Beweis. Wir behandeln den Fall

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \ni (f_i)_{i\in I}$$

$$\delta((f_i)) = (f_j - f_i)_{(i,j)\in I^2}$$

$$\delta((g_{ij})_{(i,j)\in I^2}) = (g_{jk} - g_{ik} + g_{ij})_{(i,j,k)\in I^3}$$

$$\delta^2((f_i)) = \delta((f_j - f_i)_{ij}) = ((f_k - f_j) - (f_k - f_i) + (f_j - f_i))_{ijk} = 0.$$

$\square$

Definition. $Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \operatorname{Ker}(\delta : C^n \to C^{n+1})$, die n-Kozykeln von $\mathcal{F}$ bzgl $\mathcal{U}$

Lemma $\subseteq$ $B^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \operatorname{Im}(\delta : C^{n-1} \to C^n)$, die n-Koränder von $\mathcal{F}$ bzgl $\mathcal{U}$

und

$$H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) := Z^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) / B^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

die n-te Kohomologiegruppe von $\mathcal{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$.

Bemerkung:
- $n=0$: $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$

  $Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{ (f_i \in \mathcal{F}(U_i))_{i\in I} \mid f_i = f_j \text{ auf } U_i \cap U_j \} \underset{\uparrow}{\cong} \mathcal{F}(X)$

  $\mathcal{F}$ Garbe

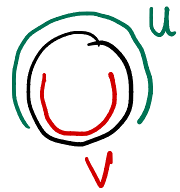
  $\Longrightarrow H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$

- $n=1$: $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \{ (f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j))_{ij} \mid f_{ik} \underset{\uparrow}{=} f_{ij} + f_{jk} \text{ auf } U_i \cap U_j \cap U_k \}$

  „Kozykelrelation"

  insbesondere: $f_{ii} = 0 \quad (i=j=k)$

  $f_{ij} = -f_{ji} \quad (j=k)$

Beispiel $X = S^1$  $\mathfrak{U} = (U, V)$

$\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Z}}$ konstante Garbe: $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}(V) = \mathbb{Z}$

$\mathcal{F}(U \cap V) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{lcll}
(f,g) & C^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & = & \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{F}(V) \\
\downarrow & \downarrow \delta & & \\
(0, g-f, f-g, 0) & C^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & = & \mathcal{F}(U\cap U) \oplus \mathcal{F}(U\cap V) \oplus \mathcal{F}(V \cap U) \oplus \mathcal{F}(V\cap V) \\
 & \downarrow \delta & & \\
 & C^2(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & = & \mathcal{F}(U\cap U\cap U) \oplus \cdots \quad (8 \text{ Summanden})
\end{array}$$

$$Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \{ (0, h, -h, 0) \mid h \in \mathcal{F}(U \cap V) \} \cong \mathcal{F}(U\cap V) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup$$

$$B^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \{ (0, g-f, f-g, 0) \mid f \in \mathcal{F}(U), g \in \mathcal{F}(V) \} \cong \{ (n,n) \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\Rightarrow \quad H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} / \Delta_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}.$$

Definition Seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ zwei Überdeckungen von X.

$\mathfrak{V}$ heißt feiner als $\mathfrak{U}$, in Zeichen $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{U}$, wenn jedes V_j in einem U_i enthalten ist.

In diesem Fall, es existiert eine Abbildung $\tau : J \to I$, so daß

$V_j \subset U_{\tau(j)}$ für alle $j \in J$.

Lemma Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und seien $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ und τ wie oben. Der Homomorphismus

$$\tau^* : C^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^n(\mathfrak{V},\mathcal{F})$$

$$(f_{i_0 \ldots i_n})_{(i_0,\ldots,i_n)\in I^{n+1}} \longmapsto (f_{\tau(j_0)\ldots\tau(j_n)})_{(j_0,\ldots,j_n)\in J^{n+1}}$$

kommutiert mit dem Randoperator δ, und damit induziert

$$\tau^* : H^n(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathfrak{V},\mathcal{F}).$$

Außerdem hängt diese letzte Abbildung <u>nicht</u> von τ ab, und wird mit $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ bezeichnet.

Beweis. Dass $\delta\tau^* = \tau^*\delta$ ist klar.

Die zweite Aussage beweisen wir nur für $n \leq 1$:

• $n=0$:

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r, "\tau^*"] & H^0(\mathcal{V},\mathcal{F}) \\ \mathcal{F}(X) \arrow[u, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd} \qquad \checkmark$$

• $n=1$: Sei $\tilde{\tau} : \mathcal{J} \to I$ eine andere Abbildung mit $V_j \subset U_{\tilde{\tau}(j)}$.

Sei $(f_{ij})_{ij} \in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$ und

$$g_{k,l} = f_{\tau k,\tau l}\, . \quad \tilde{g}_{kl} = f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l}$$

Wir müssen zeigen, daß $(g_{kl})_{kl} \equiv (\tilde{g}_{kl})_{kl}$ mod $B^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$.

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \cap U_{\tilde{\tau}(k)} \implies h_k := f_{\tau k,\tilde{\tau} k}\big|_{V_k} \in \mathcal{F}(V_k)$$

Dann $(h_k)_{k\in\mathcal{J}} \in C^0(\mathcal{V},\mathcal{F})$ und

$$\delta((h_k)_k) = (\tilde{g}_{kl} - g_{kl})_{k,l} \text{ in } C^1(\mathcal{V},\mathcal{F}):$$

$$h_l - h_k = f_{\tau l,\tilde{\tau} l} - f_{\tau k,\tilde{\tau} k}$$

(f_{ij}) ist ein Kozykel

$$\overset{\uparrow}{=} (\cancel{f_{\tau l,\tilde{\tau} k}} + f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l}) - (f_{\tau k,\tau l} + \cancel{f_{\tau l,\tilde{\tau} k}})$$

$$= f_{\tilde{\tau} k,\tilde{\tau} l} - f_{\tau k,\tau l} = \tilde{g}_{kl} - g_{kl} \quad \text{auf } V_k \cap V_l. \qquad \square$$

Sei $\mathcal{W} = (W_k)_{k\in K}$ eine dritte Überdeckung feiner als $\mathcal{V}$ und sei $\sigma : K \to \mathcal{J}$ mit $W_k \subset V_{\sigma(k)}$. Dann

$$(\tau\circ\sigma)^* = \sigma^* \circ \tau^* : C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^n(\mathcal{W},\mathcal{F})$$

$$\Rightarrow \quad t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = t^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \circ t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : H^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathcal{W},\mathcal{F}).$$

Außerdem $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}} = \mathrm{Id}_{H^n(\mathcal{U},\mathcal{F})}$

$\rightsquigarrow$ Wir haben einen Funktor

$$H^n(-,\mathcal{F}) : \{\text{Überdeckungen von } X, \le\} \longrightarrow \{\text{abelsche Gruppen, Gruppenhom.}\}$$
$$\mathcal{U} \longmapsto H^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$$
$$(\mathcal{V}\le\mathcal{U}) \longmapsto t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$$

Wir wollen den Kolimes dieses Funktors nehmen.

Kleines Problem: Überdeckungen von X bilden keine Menge, weil die Indexmenge I eine beliebige Menge ist.

Lösung: jede Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ ist isomorph (beide $\le$ und $\ge$) zu einer Überdeckung mit Indexmenge $\subset \{\text{Teilmengen von } X\}$, nämlich:

$$(U_i)_{i\in I} \ \underset{\ge}{\le}\ (U)_{U\in\{U_i \mid i\in I\}}$$

<u>Definition</u>. Sei X ein top. Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X.

Die <u>nullte Kohomologiegruppe</u> $H^0(X,\mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}(X)$.

Die <u>erste Kohomologiegruppe</u> ist

$$H^1(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U},\le} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

$$:= \left(\coprod_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\right)\Big/\sim$$

wobei: für $\alpha \in H^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $\beta \in H^1(\mathcal{V},\mathcal{F})$
$\alpha\sim\beta \Leftrightarrow \exists\ \mathcal{W}\le\mathcal{U},\ \mathcal{W}\le\mathcal{V}$ mit $t^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(\alpha) = t^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(\beta)$.

Wenn $\mathcal{F} = \underline{A}$ eine konstante Garbe ist, man schreibt auch $H^1(X,A) := H^1(X,\underline{A})$.

Bemerkungen.

1) $H^1(\mathfrak{U},-)$ und $H^1(X,-)$ sind auch Funktoren, d.h. ein Garbenhomomorphismus $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert Homomorphismen

$$\alpha_*: H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{U},\mathcal{G})$$

$$\alpha_*: H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G})$$

$$\alpha_*[(f_{ij})_{i,j}] = [(\alpha(f_{ij}))_{i,j}].$$

2) Man kann auch diesen Kalkül für $n \geq 2$ betrachten, aber im allgemeinen das gibt nicht die richtige n-te Kohomologiegruppe. Die Gruppen

$$\check{H}^n(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U},\leq} H^n(\mathfrak{U},\mathcal{F})$$

heißen die Čech-Kohomologiegruppen von X mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$. Es gibt einen kanonischen Homomorphismus

$$\check{H}^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F})$$

Er ist ein Isomorphismus wenn $n \leq 1$, und für alle n wenn X „gut" ist, z.B. wenn X eine Mannigfaltigkeit ist.

Satz (Satz von Leray)

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine off. Überdeckung von X.

1) der kanonische Homomorphismus

$$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$$

ist injektiv.

2) Wenn $H^1(U_i,\mathcal{F}) = 0$ für alle $i \in I$, dann ist

$$H^1(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F})$$

ein Isomorphismus.

Beweis.

1) Sei $(f_{ij})_{i,j} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ so daß $(f_{ij}) \mapsto 0$ in $H^1(X, \mathcal{F})$.

Dann $\exists$ $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ mit $\tau : K \to I$, $V_k \subset U_{\tau(k)}$,

so daß $\tau^*((f_{ij})_{i,j}) \in B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$,

d.h. $\exists$ $(g_k \in \mathcal{F}(V_k))_{k \in K}$ mit $f_{\tau k, \tau l} = g_l - g_k$ auf $V_k \cap V_l$.

Auf $U_i \cap V_k \cap V_l$ gilt $g_l - g_k = f_{\tau k, \tau l} = f_{\tau k, i} - f_{\tau l, i}$

$$\Rightarrow \quad f_{\tau k, i} + g_k = f_{\tau l, i} + g_l$$

$(U_i \cap V_k)_{k \in K}$ ist eine off. Überdeckung von U_i. Nach dem Garbenaxiom

$$\exists!\ h_i \in \mathcal{F}(U_i) \text{ mit } h_i|_{U_i \cap V_k} = f_{\tau k, i} + g_k .$$

Auf $U_i \cap U_j \cap V_k$ gilt

$$f_{ij} = f_{\tau k, j} - f_{\tau k, i} = h_j - h_i$$

$(U_i \cap U_j \cap V_k)_{k \in K}$ ist eine off. Überdeckung von $U_i \cap U_j$. Nach dem Garbenaxiom, $f_{ij} = h_j - h_i$ gilt auf $U_i \cap U_j$

d.h., $(f_{ij})_{i,j} = \delta((h_i)_i) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

2) Es genügt zu zeigen: für jede $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K} \leq \mathfrak{U}$,

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \text{ ist surjektiv.}$$

Sei $\tau : K \to I$ mit $V_k \subset U_{\tau(k)}$ und sei

$(g_{kl} \in \mathcal{F}(V_k \cap V_l))_{k,l}$ ein Kozyklus von $\mathcal{F}$ bzgl. $\mathfrak{V}$.

Wir suchen einen Kozyklus (f_{ij}) bzgl. $\mathfrak{U}$, so daß $(f_{\tau k, \tau l})_{k,l} \equiv (g_{kl})_{kl}$ mod $B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$.

Sei $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{V} := (U_i \cap V_k)_{k \in K}$. Nach Voraussetzung und 1),

$$H^1(\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$$

$\Rightarrow$ der Kozyklus $(g_{kl}|_{U_i \cap V_k \cap V_l})_{k,l}$ ist ein Korand, d.h.

$\exists$ $h_{ik} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$ mit $g_{kl} \overset{(*)}{=} h_{il} - h_{ik}$ auf $U_i \cap V_k \cap V_l$.

$\Rightarrow$ auf $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$ gilt

$$h_{ik} - h_{jk} = h_{il} - h_{jl}$$

Nach dem Garbenaxiom bzgl der Überdeckung $(U_i \cap U_j \cap V_k)_{k \in K}$ von $U_i \cap U_j$, $\exists!$ $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ mit

$$f_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap V_k} \overset{(**)}{=} h_{ik} - h_{jk}$$

Dann (f_{ij}) ist ein Kozyklus bzgl. $\mathfrak{U}$ ($f_{i_0 i_2} = f_{i_0 i_1} + f_{i_1 i_2}$ auf jede $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap V_k$).

Sei $r_k := h_{\tau k, k} \in \mathcal{F}(V_k)$.

Dann
$$g_{kl} - f_{\tau k, \tau l} \underset{\substack{(*) \text{ und} \\ (**)}}{=} (\cancel{h_{\tau k, l}} - h_{\tau k, k}) - (\cancel{h_{\tau k, l}} - h_{\tau l, l})$$

$$= r_l - r_k$$

$\Rightarrow$ $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}[(f_{ij})_{i,j}] = [(g_{kl})_{k,l}]$ in $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. $\square$

Die lange exakte Sequenz

Sei $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf X.

Der verbindende Homomorphismus

$$\delta : \mathcal{H}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

wird wie folgt definiert. Sei $h \in \mathcal{H}(X)$.

β ist ein Epimorphismus $\Rightarrow$ $\beta_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ ist surjektiv für alle $x \in X$

$\Rightarrow$ $\exists$ Umgebung U_x von x und $g_x \in \mathcal{G}(U_x)$ so daß $\beta(g_x) = h|_{U_x}$.

Auf $U_x \cap U_y$, $\beta(g_x - g_y) = 0$. Nach der Exaktheit der Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{F}(U_x \cap U_y) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}(U_x \cap U_y) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}(U_x \cap U_y) \\ & \cup & & \cup & & \cup \\ \exists! & f_{xy} & \longmapsto & g_x - g_y & \longmapsto & 0 \end{array}$$

$(\alpha(f_{xy}))_{x,y}$ ist ein Kozyklus von $\mathcal{G}$ (sogar ein Korand)

und α ist injektiv $\Longrightarrow$ $(f_{xy})_{x,y}$ ist ein Kozyklus von $\mathcal{F}$

(d.h. $f_{xy} + f_{yz} = f_{xz}$)

Man setzt $\delta(h) := [(f_{xy})_{x,y}] \in H^1(X, \mathcal{F})$.

Das hängt nicht von der Wahl von U_x und g_x ab:

Wenn U_x' und $g_x' \in \mathcal{G}(U_x')$ eine andere Wahl ist, dann $\exists$ $U_x'' \subset U_x \cap U_x'$ auf dem $g_x - g_x' \in \operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$

$\Longrightarrow$ $(f_{xy} - f_{xy}')_{x,y}$ ist ein Korand.

Satz. Die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^1(X, \mathcal{H})$$

ist exakt.

Beweis. Man hat zu zeigen: a) $\mathrm{Im}(\beta_X) = \mathrm{Ker}(\delta)$

b) $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\alpha_*)$

c) $\mathrm{Im}(\alpha_*) = \mathrm{Ker}(\beta_*)$

a) • $\mathrm{Im}(\beta_X) \subset \mathrm{Ker}(\delta)$:

$g \in \mathcal{G}(X)$, $\quad \delta(\beta(g)) \overset{?}{=} 0$

man kann wählen $U_x = X$ und $g_x = g$ in der Definition von δ.

$\Longrightarrow \delta(\beta(g)) = (\text{Urbild von } g-g)_{x,y} = 0$.

• $\mathrm{Ker}(\delta) \subset \mathrm{Im}(\beta_X)$:

Sei $h \in \mathcal{H}(X)$ mit $\delta(h) = 0$, d.h. $(f_{xy})_{x,y}$ ist ein Korand bzgl. einer Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ von $(U_x)_{x\in X}$, $\tau: I \to X$ mit $V_i \subset U_{\tau(i)}$.

$$\begin{cases} \alpha(f_{xy}) = g_x - g_y & (*) \\ \beta(g_x) = h|_{U_x} & (**) \end{cases}$$

$\exists\ f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ mit $f_{\tau i, \tau j} \overset{(+)}{=} f_j - f_i$ auf $V_i \cap V_j$.

Sei $\tilde{g}_i \overset{(++)}{=} g_{\tau(i)} - \alpha(f_i) \in \mathcal{G}(V_i)$

$\overset{(*) \text{ und } (+)}{\Longrightarrow} \tilde{g}_i = \tilde{g}_j$ auf $V_i \cap V_j$

$\Rightarrow \exists!\ \tilde{g} \in \mathcal{G}(X)$ so daß $\tilde{g}|_{V_i} = \tilde{g}_i$

$\Rightarrow \beta(\tilde{g}) = h$ wegen $(**)$, $(++)$ und $\beta\circ\alpha = 0$.

b) und c) ... $\square$.

H^1- Berechnungen

Satz (Kohomologie glatter Formen)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann

$$H^1(X, \mathcal{E}) = 0$$

und genauso mit $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{(2)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}$ anstelle von $\mathcal{E}$

(oder sogar mit einer beliebigen $\mathcal{E}$-Modulgarbe.)

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine dieser Garben.

Es genügt zu zeigen, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$.

$\exists$ eine glatte Zerlegung der Eins bzgl. $\mathfrak{U}$:

$f_i \in \mathcal{E}(U_i)$ mit: i) $\operatorname{Supp}(f_i) \subset U_i$

ii) jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der nur endlich viele f_i nicht null sind

iii) $\sum_{i \in I} f_i = 1$

(siehe z.B. Forster, Anhang A)

Sei $(\omega_{ij})_{i,j \in I^2} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, $\omega_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$

$f_j \omega_{ij} \in \mathcal{F}(U_i)$ ($f_j = 0$ wo ω_{ij} nicht definiert ist)

Sei $\eta_i := \sum_{j \in I} f_j \omega_{ij}$

Die Summe ist lokal endlich nach ii) $\Rightarrow \eta_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

Auf $U_i \cap U_j$ gilt:

$$\eta_i - \eta_j = \sum_{k \in I} f_k(\omega_{ik} - \omega_{jk}) \overset{(\omega_{ij})\text{ Kozyklus}}{=} \sum_{k \in I} f_k \omega_{ij} = \Big(\sum_{k \in I} f_k\Big) \omega_{ij} \underset{\text{iii)}}{=} \omega_{ij}$$

$\Rightarrow (\omega_{ij})_{ij}$ ist ein Korand. $\square$

Bemk Allgemeiner sind alle höheren Kohomologiegruppen
$H^n(X, \mathcal{E}^{(*)})$ null für $n \geq 1$
(solche Garben heißen azyklisch)

Satz von de Rham X Riemannsche Fläche

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong H^1_{dR}(X, \mathbb{C}).$$

Beweis. Man verwendet die Sequenz

$$0 \to \underline{\mathbb{C}} \to \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \to 0$$

wobei $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(d : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)})$. Sie ist exakt, weil:

- f lokal konstant $\Longleftrightarrow$ $df = 0$
- lokal ist jede geschlossene 1-Form exakt
  (weil $H^1_{dR}(D, \mathbb{C}) = 0$)

$H^1(X, \mathcal{E}) = 0 \Rightarrow$

$$0 \to \underline{\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{Z}(X) \to H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \to H^1(X, \mathcal{E}) = 0$$

ist exakt

$$\Rightarrow \quad H^1(X, \underline{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{Z}(X) / \mathrm{Im}(d) = H^1_{dR}(X, \mathbb{C}). \quad \square$$

Korollar Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche. Dann

1) $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$
2) $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$

Beweis. 1) $H^1_{dR}(X, \mathbb{C}) = 0$.

2) Aufgabe 12.3 (c) : $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{C})$ ist injektiv. $\square$.

Bemerkung. • Alle H^1-Berechnungen bisher gelten für beliebige glatte Mannigfaltigkeiten.
• Der Satz von de Rham gilt dann für H^n, $n \geq 0$.

Das Dolbeaultsche Lemma Sei $X = D$ oder $\mathbb{C}$. Dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X) \quad \text{ist surjektiv.}$$

Korollar Für X eine R.F. $\quad H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X) / \bar{\partial} \mathcal{E}(X)$

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) / d\mathcal{E}^{1,0}(X).$$

Beweis. Nach dem Dolbeaultschen Lemma, sind die Garbenhomomorphismen

$$\bar{\partial} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{0,1} \quad \text{und} \quad d = \bar{\partial} : \mathcal{E}^{1,0} \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}$$

Epimorphismen (lokal können sie mit $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ identifiziert werden).

$\Rightarrow$ es gibt exakte Sequenzen

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \to 0$$

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

$H^1(X, \mathcal{E}) = H^1(X, \mathcal{E}^{1,0}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Korollar. $\square$

Lemma Zu jeder Funktion $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit kompaktem Träger, gibt es $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

Beweis. Man definiert $f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C} \setminus \{\zeta\}} \frac{g(z)}{z - \zeta} \, dz \wedge d\bar{z}$.

Wir verwenden Polarkoordinaten r, θ um ζ, d.h. $z = \zeta + re^{i\theta}$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} dz &= rie^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr \\ d\bar{z} &= -rie^{-i\theta} d\theta + e^{-i\theta} dr \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} & dz \wedge d\bar{z} \\ &= -2ri \, dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Sei $R > 0$ mit $\operatorname{Supp}(g) \subset B(0, R)$.

$$\Rightarrow f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi]} \frac{g(\zeta + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot r \, dr \wedge d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{[0, R] \times [0, 2\pi]} g(\zeta + re^{i\theta}) e^{-i\theta} dr \wedge d\theta.$$

$\Longrightarrow$ f ist glatt, und man kann unter dem Integralzeichen ableiten:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial g(\zeta + re^{i\theta})}{\partial \bar\zeta}\, e^{-i\theta}\, dr \wedge d\theta$$

$$\underset{z = re^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \frac{\partial g(\zeta+z)}{\partial \bar\zeta}\,\frac{1}{z}\, dz \wedge d\bar z .$$

$$= -\int_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} d\omega \qquad \text{wobei } \omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{g(\zeta+z)}{z}\, dz$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B(0,R)\setminus D(0,\varepsilon)} d\omega \underset{\text{Green}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \omega$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{g(\zeta+z)}{z}\, dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{g(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\, \varepsilon i e^{i\theta}\, d\theta .$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\zeta+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta}_{\text{Mittelwert von } g \text{ auf } \partial B(\zeta,\varepsilon)} \overset{g \text{ stetig.}}{=} g(\zeta)$$

$\square$

<u>Beweis des Dolbeaultschen Lemmas</u> $[X = D \text{ oder } \mathbb{C}]$

Sei $g \in \mathcal{E}(X)$. Seien $0 < R_1 < R_2 < \cdots$ Radien mit $\lim_{n\to\infty} R_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } X = D \\ \infty & \text{falls } X = \mathbb{C}\end{cases}$

$D_n = B(0, R_n)$, und sei $\psi_n \in \mathcal{E}(D_{n+1})$ mit kompaktem Träger und $\psi_n|_{D_n} = 1$.

Nach dem Lemma, es gibt $f_n \in \mathcal{E}(X)$ mit

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar z} = \psi_n g .$$

Wir konstruieren eine Folge $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$, $\tilde{f}_n \in \mathcal{E}(X)$, so daß

- $\frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}}\Big|_{D_n} = g\big|_{D_n}$

- $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{\overline{D_{n-1}}} < 2^{-n}$

das Supremum über $\overline{D_{n-1}}$

Dann $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ konvergiert zu einer glatten Funktion $f \in \mathcal{E}(X)$.

Außerdem $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$, weil $X = \bigcup_{n\geq 1} D_n$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\Big|_{D^n} = \lim_m \frac{\partial \tilde{f}_m}{\partial \bar{z}}\Big|_{D^n} = g\big|_{D^n}$.

konstante Folge für $m \geq n$

- $\tilde{f}_1 = f_1$

- Seien $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ schon konstruiert. Dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(f_{n+1} - \tilde{f}_n\right) = g - g = 0 \quad \text{auf } D_n$$

$\Rightarrow$ $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ ist holomorph auf D_n

$\Rightarrow$ $\exists\ h \in \mathcal{O}(X)$ so daß $\|f_{n+1} - \tilde{f}_n - h\|_{\overline{D_{n-1}}} < 2^{-n}$

(z.B. h ist ein Polynomabschnitt der Taylorreihe von $f_{n+1} - \tilde{f}_n$).

Sei $\tilde{f}_{n+1} = f_{n+1} - h$. Dann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}_{n+1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{n+1} = g \quad \text{auf } D_{n+1}$$

und $\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{\overline{D_{n-1}}} < 2^{-n}$. $\square$.

Korollar Sei $X = D$ oder $\mathbb{C}$. Dann $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Beweis. $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X) / \bar\partial \mathcal{E}(X)$

Aber $\mathcal{E}^{0,1}(X) = \{ g \cdot d\bar z \mid g \in \mathcal{E}(X) \}$

und $\bar\partial f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} \cdot d\bar z$,

also $\bar\partial : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X)$ ist surjektiv. $\square$.

Satz $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$.

Beweis. Sei $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$
$U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ $\mathcal{U} = (U_1, U_2)$

Nach dem letzten Korollar $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$.

Satz von Leray $\Rightarrow$ $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) \cong H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$.

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = \{ (f_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} \mid f_{ii} = 0 \text{ und } f_{ij} = -f_{ji} \} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$$
$$(f_{ij})_{i,j} \longmapsto f_{12}$$

Für gegebenen $f_{12} \in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2)$, wir suchen $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit

$f_{12} = f_1|_{\mathbb{C}^*} - f_2|_{\mathbb{C}^*}$.

f hat eine Laurentreihenentwicklung:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

Wir setzen $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$f_2(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \in \mathcal{O}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$

und $f = f_1 - f_2$ auf $\mathbb{C}^*$, wie gewünscht. $\square$.

Kapitel 8. Der Riemann-Rochsche Satz

Erinnerung:

- Auf einer z.h. kompakten Riemannschen Fläche X, jede holomorphe Funktion $f: X \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant:

  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X) = 1$.

- Es gibt interessante Funktionen, wenn Polstellen erlaubt sind.
  - $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{C}(z)$

    z.B. $z \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ hat eine Polstelle in ∞, mit Ordnung 1.
  - Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion $\wp \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ hat eine einzige Polstelle $[0] \in \mathbb{C}/\Gamma$, von Ordnung 2.
  - Auf $\mathbb{C}/\Gamma$, jede nicht-konstante $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}/\Gamma)$ hat mindestens zwei Polstellen mit Vielfachheit gerechnet.

  Wenn X besitzt eine $f \in \mathcal{M}(X)$ mit einer einzigen Polstelle (mit Vielfachheit gerechnet), dann $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist eine verzweigte Überlagerung mit Blätterzahl 1
  $\Longrightarrow$ f ist ein Biholomorphismus.

Wir möchten meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen besser verstehen. Es gibt drei wichtige Sätze:

1) Endlichkeitssatz: der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller meromorphen Funktionen mit „begrenzten Polstellen" ist endlich-dimensional.

2) Riemannscher Existenzsatz: seine Dimension ist manchmal positiv, d.h., es existiert solche meromorphe Funktionen $f \neq 0$.

3) Riemann-Rochscher Satz: eine genaue Formel für diese Dimension.

Wir werden folgenden Endlichkeitssatz vorläufig annehmen:

Satz (Forster, Korollar 14.10)

Für jede kompakte Riemannsche Fläche X gilt $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X) < \infty$.

Definition Sei X kompakt.

Das Geschlecht von X ist $g = g(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$

Beispiele:

- $g(\mathbb{P}^1) = 0$ (schon gezeigt)
- $g(\mathbb{C}/\Gamma) = 1$
- Sei X eine hyperelliptische Kurve einem Polynom vom Grad n zugeordnet. Dann
$$g(X) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & , n \text{ ungerade} \\ \frac{n-2}{2} & , n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Satz Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zu jedem Punkt $a \in X$ existiert eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, deren Polstellenmenge genau $\{a\}$ ist.

Beweis. Sei (U_1, z) eine Karte um a mit $z(a) = 0$, und sei $U_2 = X \setminus \{a\}$.

Dann $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ ist eine off. Überdeckung von X mit $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$.

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$, die holomorphe Funktion $z^{-n} \in \mathcal{O}(U_1 \setminus \{a\})$ definiert einen Kozyklus $\xi_n \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

Da $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ injektiv ist, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) < \infty$

$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$

$\Rightarrow \exists\, k \geq 1$, so daß $\xi_1, \ldots, \xi_k$ modulo Korändern linear abhängig sind

$\Rightarrow \exists\, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, nicht alle gleich null, und eine 0-Kokette $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(U_1) \times \mathcal{O}(U_2)$, so daß $c_1 \xi_1 + \cdots + c_k \xi_k = \delta(\eta)$.

das heißt: $\sum_{n=1}^{k} c_n z^{-n} = f_2 - f_1$ auf $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$.

$\Longrightarrow$ die holomorphe Funktion $f_2 \in \mathcal{O}(X \setminus \{a\})$ hat eine Polstelle im Punkt a (von Ordnung $\leq k$). $\square$.

<u>Korollar</u> Sei X kompakt. Dann existiert eine verzweigte Überlagerung $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

<u>Korollar</u> (Riemannscher Existenzsatz für kompakte Flächen)

Sei X eine kompakte R.F., $a_1, \dots, a_n \in X$, $a_i \neq a_j$, und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $f(a_i) = c_i$ für alle i.

Beweis. Für jeden Punkt a_i, sei $f_i \in \mathcal{M}(X)$ mit Polstellenmenge $\{a_i\}$.

Für $i \neq j$, sei $$g_{ij} = \frac{f_i - f_i(a_j)}{f_i - f_i(a_j) + 1} \in \mathcal{M}(X).$$

Dann $g_{ij}(a_i) = 1$, $g_{ij}(a_j) = 0$.

Sei $h_i = \prod_{j \neq i} g_{ij} \in \mathcal{M}(X)$.

Dann $h_i(a_i) = 1$ und $h_i(a_j) = 0$ für alle $j \neq i$.

$\Longrightarrow$ $f = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$ hat die gewünschte Eigenschaft. $\square$.

<u>Bemerkung</u> Dieser Satz impliziert, daß $[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(X)] = n$ für jede n-blättrige verzweigte Überlagerung $Y \to X$ (X kompakt), siehe Kapitel 5.

Divisoren

Ein Divisor auf einer Riemannschen Fläche X ist eine Abbildung

$$D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$$

so daß $\{x \in X \mid D(x) \neq 0\}$ lokal endlich ist.

Die Menge aller Divisoren auf X wird mit $\mathrm{Div}(X)$ bezeichnet.

$\mathrm{Div}(X)$ ist eine abelsche Gruppe mit

- $(D+D')(x) := D(x) + D'(x)$

und auch eine halbgeordnete Menge mit

- $D \leq D' \iff D(x) \leq D'(x)$ für alle $x \in X$.

(Man schreibt auch $D = \sum_{x \in X} D(x) \cdot x$.)

Sei $f \in \mathcal{M}(X)^*$. Dann $x \longmapsto \mathrm{ord}_x(f) \in \mathbb{Z}$ ist ein Divisor auf X, weil

$$\{x \in X \mid \mathrm{ord}_x(f) \neq 0\} = \{\underset{(>0)}{\text{Nullstellen von } f}\} \cup \{\underset{(<0)}{\text{Polstellen von } f}\}$$

lokal endlich ist.

Dieser Divisor heißt der Divisor von f und wird mit (f) oder $\mathrm{ord}(f)$ oder $\mathrm{div}(f)$ bezeichnet.

(z.B.: f holomorph $\iff (f) \geq 0$)

ord_x ist eine Bewertung auf $\mathcal{M}(X) \Rightarrow \mathrm{ord}_x(fg) = \mathrm{ord}_x(f) + \mathrm{ord}_x(g)$

$\Rightarrow (fg) = (f) + (g)$, d.h. $f \mapsto (f)$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{ord}/\mathrm{div} : \mathcal{M}(X)^* \longrightarrow \mathrm{Div}(X).$$

Ein Divisor D heißt Hauptdivisor, wenn $D \in \mathrm{Im}(\mathrm{ord})$.

Zwei Divisoren D und D' sind linear äquivalent, falls $D-D'$ ein Hauptdivisor ist. Der Quotient

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}(X)/\sim \;=\; \mathrm{Coker}(\mathrm{ord})$$

heißt die Divisorenklassengruppe oder Picard-Gruppe von X.

Die Ordnung ist auch für meromorphe Diff'formen definiert (siehe Aufgabe 10.1), also zu jeder Form $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*$ gibt einen Divisor $(\omega) \in \mathrm{Div}(X)$, so daß

auf keiner Z.h.-komponente identisch null

$$(f\omega) = (f) + (\omega), \text{ für } f \in \mathcal{M}(X)^*, \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*.$$

Seien $\omega, \omega' \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*$, dann "$\frac{\omega'}{\omega}$" ist eine wohldefinierte meromorphe Funktion, d.h., $\exists\, f \in \mathcal{M}(X)^*$ so daß $\omega' = f\omega$

$$\left(\text{lokal: } \begin{array}{l} \omega = g\,dz \\ \omega' = g'\,dz \end{array} \Rightarrow f = \frac{g'}{g} \right)$$

$$\Rightarrow \quad (\omega) \sim (\omega')$$

Def. Ein Divisor der Gestalt (ω) mit $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*$ heißt kanonischer Divisor auf X.

Bemerkung Auf komplexen Mannigfaltigkeiten höherer Dimension, Divisoren sind Abbildungen

$$D: \left\{ \begin{array}{l} \text{irreduzible} \\ \text{Hyperflächen} \end{array} Y \subset X \right\} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Definition Sei X kompakt. Der Grad eines Divisors $D \in \mathrm{Div}(X)$ ist

$$\deg(D) = \sum_{x \in X}' D(x) \in \mathbb{Z}$$

Der Grad ist ein Gruppenhomomorphismus $\deg: \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ (surjektiv wenn $X \neq \emptyset$).

Für einen Hauptdivisor (f) gilt $\deg(f) = 0$, weil $\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) = 0$.

$\Rightarrow$ deg induziert

$$\deg: \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Die Garben $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{H}^D_{D'}$

Definition Sei D ein Divisor auf X. Man definiert die Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $\mathcal{O}_D$ auf X durch:

$$\mathcal{O}_D(U) = \{ f \in \mathcal{M}(U) \mid \mathrm{ord}_x(f) \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U \}$$

Das ist eine Untergarbe von $\mathcal{M}$.

Zum Beispiel: $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$ ← Nulldivisor

Sind D und D' linear äquivalent, so sind $\mathcal{O}_D$ und $\mathcal{O}_{D'}$ isomorph:

$$D = D' + (f) \quad \text{mit } f \in \mathcal{M}(X)^*$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_D &\xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{D'} \\ g &\longmapsto gf \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} &\mathrm{ord}_x(g) \geq -D(x) \\ \Rightarrow\ &\mathrm{ord}_x(gf) = \mathrm{ord}_x(g) + \mathrm{ord}_x(f) \\ &\qquad \geq -D(x) + \mathrm{ord}_x(f) \\ &\qquad = -D'(x) \end{aligned} \right]$$

(Der Umkehrmorphismus ist $g \mapsto gf^{-1}$).

Ziel: $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) = ?$

Satz X zh. kompakt, $\deg(D) < 0$. Dann $\mathcal{O}_D(X) = \{0\}$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{O}_D(X)$, $f \neq 0$. Dann $(f) \geq -D$

$$\Longrightarrow \deg(f) \geq -\deg(D) > 0$$

Aber $\deg(f) = 0$, Widerspruch. $\square$

Seien $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X. Dann $\mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_{D'} \subset \mathcal{M}$.
Man definiert die Garbe $\mathcal{H}^D_{D'}$ als die Quotientengarbe

$$\mathcal{H}^D_{D'} := \mathcal{O}_{D'}/\mathcal{O}_D = a\left(U \mapsto \mathcal{O}_{D'}(U)/\mathcal{O}_D(U)\right)$$

$\Longrightarrow$ exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \longrightarrow \mathcal{H}^D_{D'} \longrightarrow 0.$$

Satz $D \leq D'$ auf X.

1) Der Halm $(\mathcal{H}^D_{D'})_x$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $D'(x) - D(x)$

2) $H^1(X, \mathcal{H}^D_{D'}) = 0$

3) Ist X kompakt, so gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^D_{D'}(X) = \deg D' - \deg D$.

Beweis. 1) $(\mathcal{H}^D_{D'})_x \cong \mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x}$ und $\mathcal{O}_{D,x} \subset \mathcal{M}_x$

(U, z) Karte um x mit $z(x) = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_x \cong \left\{ \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n \text{ mit positivem Konvergenzradius} \right\}$$

$\mathcal{O}_{D,x} \subset \mathcal{M}_x$ besteht aus allen Laurentreihen mit $a_n = 0$ für $n < -D(x)$.

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{D',x} / \mathcal{O}_{D,x} \cong \left\{ \sum_{n=-D'(x)}^{-D(x)-1} a_n z^n \right\} \text{ hat Dimension } D'(x) - D(x).$$

2) Sei $\mathfrak{U}$ eine off. Überdeckung von X.

Die Menge $S = \{ x \in X \mid D(x) \neq D'(x) \}$ ist lokal endlich

$\Rightarrow \exists$ eine Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ von $\mathfrak{U}$, so daß jeder $x \in S$ in höchstens einem V_i enthalten ist

(z.B. $I = X$ und V_x Umgebung von x, so daß $V_x \cap S = \emptyset$ wenn $x \notin S$)

Nach 1), $S = \{ x \in X \mid (\mathcal{H}^D_{D'})_x \neq 0 \}$

$\Longrightarrow \mathcal{H}^D_{D'}(V_i \cap V_j) = 0$ wenn $i \neq j$

$\Longrightarrow Z^1(\mathcal{V}, \mathcal{H}^D_{D'}) = 0$ $\quad (f_{ij})_{i,j} \quad f_{ij} \in \mathcal{H}^D_{D'}(V_i \cap V_j) \quad f_{ii} = 0$

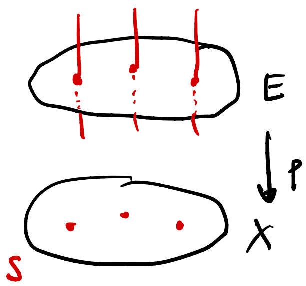
$\Longrightarrow$ jeder Kozyklus in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}^D_{D'})$ wird null in $H^1(X, \mathcal{H}^D_{D'})$

$\Longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}^D_{D'}) = 0$

3) $\mathcal{H}^D_{D'}$ ist die Vergarbung von $U \mapsto \mathcal{O}_{D'}(U)/\mathcal{O}_D(U)$

Sei E der Étalé-Raum von dieser Prägarbe:

$$E = \coprod_{x\in X} \underbrace{\mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}}_{=\{0\} \text{ wenn } x\notin S} \xrightarrow{p} X$$



Die Topologie auf E ist so, daß jeder Schnitt von p stetig ist.

$$\mathcal{H}^D_{D'}(X) = \{ s: X \to E \mid p\circ s = \mathrm{Id}_X \} = \prod_{x\in X} p^{-1}(x)$$

$$= \prod_{x\in X} \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$$

(X kompakt)

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^D_{D'}(X) = \sum_{x\in X} \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H}^D_{D'})_x \overset{1)}{=} \sum_{x\in X} (D'(x) - D(x))$$

$$= \deg D' - \deg D. \qquad \square.$$

<u>Korollar</u> Seien $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_D(X) \to \mathcal{O}_{D'}(X) \to \mathcal{H}^D_{D'}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

<u>Satz von Riemann-Roch</u>

Sei X eine z.h. kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und D ein Divisor auf X.
Dann sind $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ und $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ endlich-dimensional und

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg(D)$$

Bmk Die Zahl $i(D) := \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_D)$ heißt der <u>Spezialitätsindex</u> des Divisors D.

Riemann hatte vorher folgende Ungleichung erhalten:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) \geq 1 - g + \deg(D)$$

Später bestimmte sein Student Roch die Differenz.

Beweis. Seien $D \leq D'$ zwei Divisoren auf X. Wir betrachten die exakte Sequenz:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_D) \to H^0(\mathcal{O}_{D'}) \to \underbrace{H^0(\mathcal{H}^{D}_{D'})}_{\text{Dim} < \infty} \to H^1(\mathcal{O}_D) \to H^1(\mathcal{O}_{D'}) \to 0$$

Es folgt: $H^0(\mathcal{O}_D)$ & $H^1(\mathcal{O}_D)$ sind endlich $\Longleftrightarrow$ $H^0(\mathcal{O}_{D'})$ & $H^1(\mathcal{O}_{D'})$ sind

Außerdem: $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}_D) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_D) + \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{H}^D_{D'})}_{\deg D' - \deg D} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}_{D'}) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}_{D'})$

$\Rightarrow$ der Satz gilt für $D \Longleftrightarrow$ er gilt für D'.

Aber der Satz gilt für $D = 0$: $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}) = 1$
$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}) = g$

$\Rightarrow$ der Satz gilt für alle D. $\square$

<u>**Korollar**</u> Sei X z.h. kompakt, vom Geschlecht g, und $a \in X$ ein Punkt. Dann existiert $f \in \mathcal{M}(X)$ nicht konstant mit $\mathrm{ord}_a(f) \geq -(g+1)$ und $f|_{X \setminus \{a\}}$ holomorph.

[z.B. $X = \mathbb{C}/\Gamma$, $g = 1$, $\wp$ hat eine einzige Polstelle der Ordnung 2]

Insbesondere, es gibt eine verzweigte Überlagerung $f: X \to \mathbb{P}^1$ mit höchstens $g+1$ Blättern.

Beweis. Sei $D(x) = \begin{cases} g+1 & \text{falls } x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$. Dann $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) \geq 1 - g + g + 1 = 2$.

$\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{O}_D(X)$ nicht konstant. $\square$

Korollar Sei X eine (z.h. kompakte) Riemannsche Fläche mit $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$.
Dann $X \cong \mathbb{P}^1$.

Bemerkung. Hirzebruch hat 1954 den Satz von Riemann-Roch zu höheren Dimensionen verallgemeinert.

Sei X eine kompakte komplexe Mfkeit und $\mathcal{E}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln, die lokal zu $\mathcal{O}_X^n$ isomorph ist (z.B. $\mathcal{E} = \mathcal{O}_D$ mit einem Divisor D).

Dann: $H^i(X,\mathcal{E})$ ist endlich-dimensional für alle i, und

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X,\mathcal{E}) = \int_X td(X) \cdot ch(\mathcal{E}).$$

Serresche Dualität

Sei Ω_D die Garbe

$$\Omega_D(U) = \{ \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) \mid ord_x(\omega) \geq -D(x) \text{ für alle } x \in U \}$$

Satz (Serresche Dualität)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X.
Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$H^1(X,\mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X,\Omega_{-D})$$

wobei V^* ist der Dualraum $Hom_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$.

Korollar X ist kompakt vom Geschlecht g.

1) $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega(X)$

2) Für jeden Divisor D gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_D(X) - \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{-D}(X) = 1 - g + \deg D$$

<u>Bemerkung</u> Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*$, z.B. $\omega = df$ mit f einer nirgends-konstanten meromorphen Funktion auf X.

Sei $K = (\omega)$ (kanonischer Divisor)

Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Omega_D &\cong \mathcal{O}_{D+K} \\ g\omega &\longleftarrow\!\shortmid g \\ \omega' &\longmapsto \frac{\omega'}{\omega} \end{aligned} .$$

Um eine solche Dualität zu beweisen, braucht wir eine bilineare Form

$$\langle -,- \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Das wird in zwei Schritten definiert:

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow[a)]{} H^1(X, \Omega) \xrightarrow[b)]{\text{Res}} \mathbb{C}$$

a) wird von folgender Paarung induziert:

$$\begin{aligned} \Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D &\longrightarrow \Omega \\ (\omega, f) &\longmapsto \omega f \end{aligned} \qquad \left[\begin{aligned} \text{ord}_x(\omega f) &= \text{ord}_x(\omega) + \text{ord}_x(f) \\ &\geq D(x) - D(x) = 0 \end{aligned} \right]$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \Omega_{-D}(X) \times C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_D) &\longrightarrow C^1(\mathcal{U}, \Omega) \\ (\omega, (f_{ij})_{i,j}) &\longmapsto (\omega f_{ij})_{i,j} \end{aligned} .$$

b) $$\text{Res}: H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) / d\mathcal{E}^{1,0}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$[\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)] \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_X \omega$$

Die bilineare Form $\langle -,- \rangle$ induziert

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \quad \omega \mapsto \langle \omega, - \rangle$$

<u>Satz</u> (Serresche Dualität, genauer)

ι_D ist ein Isomorphismus.

Mittag-Leffler-Verteilungen X ein RF, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine off. Überdeckung von X.

Eine **ML-Verteilung** bzgl. $\mathfrak{U}$ ist eine 0-Kokette $\mu = (\omega_i)_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$

so daß $\omega_j - \omega_i$ auf $U_i \cap U_j$ holomorph ist, d.h.:

$$\delta(\mu) \in C^1(\mathfrak{U}, \Omega) \subset C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)}).$$

Das Residuum von μ in einem Punkt a ist

$$\mathrm{Res}_a(\mu) := \mathrm{Res}_a(\omega_i), \text{ wobei } a \in U_i.$$

(unabhängig von i, weil $\mathrm{Res}_a(\omega_j - \omega_i) = 0$ falls $a \in U_i \cap U_j$)

Wenn X kompakt ist kann man definieren:

$$\mathrm{Res}(\mu) = \sum_{x\in X} \mathrm{Res}_x(\mu) \quad \text{(endliche Summe)}$$

Lemma (Verallgemeinerung des Residuensatzes)

$$\mathrm{Res}(\mu) = \mathrm{Res}(\underbrace{[\delta(\mu)]}_{\in H^1(X,\Omega)})$$

(Forster 17.3)

Injektivität von $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$

Zu zeigen: zu jedem $\omega \in \Omega_{-D}(X)$, $\omega \neq 0$, $\exists\ \xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ mit $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$.

Sei $a \in X$ mit $D(a) = 0$, (U_1, z) Karte um a mit $z(a) = 0$ und $D|_{U_1} = 0$.

$\omega|_{U_1} = f\,dz$ mit $f \in \mathcal{O}(U_1)$. Wir dürfen annehmen, dass $f|_{U_1\setminus\{a\}}$ keine Nullstellen hat.

Sei $U_2 = X\setminus\{a\}$, $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$

$$\eta = ((zf)^{-1}, 0) \in \mathcal{M}(U_1) \times \mathcal{M}(U_2) = C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}).$$

$\leadsto \delta(\eta) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$, weil $(zf)^{-1}|_{U_1\setminus\{a\}} \in \mathcal{O}(U_1\setminus\{a\}) \underset{D|_{U_1}=0}{=} \mathcal{O}_D(U_1\setminus\{a\})$

und

$\omega\eta = \left(\frac{dz}{z}, 0\right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ ist eine ML-Verteilung bzgl. $\mathfrak{U}$

mit $\mathrm{Res}(\omega\eta) = 1$.

Sei $\xi = [\delta\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$.

Denn $\langle \omega, \xi \rangle = \operatorname{Res}(\omega\xi) = \operatorname{Res}(\underbrace{[\delta(\omega\eta)]}_{\in H^1(X,\Omega)}) \overset{\text{Lemma}}{=} \operatorname{Res}(\omega\eta) = 1.$ $\square$.

<u>Surjektivität von ι_D</u>

Seien $D \leq E$ zwei Divisoren auf X.

$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_D \subset \mathcal{O}_E$ und $\Omega_D \subset \Omega_E$

Da $H^1(X, \mathcal{H}^D_E) = 0$, ist $H^1(X, \mathcal{O}_D) \xrightarrow{\varphi} H^1(X, \mathcal{O}_E)$ surjektiv

also die Dualabbildung $\varphi^*: H^1(X, \mathcal{O}_E)^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ ist injektiv.

Es gilt ein kommutatives Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(X, \Omega_{-E}) & \xhookrightarrow{\text{Inkl}} & H^0(X, \Omega_{-D}) \\
\iota_E \big\downarrow & & \big\downarrow \iota_D \\
H^1(X, \mathcal{O}_E)^* & \xhookrightarrow{\varphi^*} & H^1(X, \mathcal{O}_D)^*
\end{array}$$

<u>Lemma 1</u> Dieses Quadrat ist <u>kartesisch</u>, d.h.:

für $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, ist $\iota_D(\omega) \in \operatorname{Im}(\varphi^*)$, so ist $\omega \in H^0(X, \Omega_{-E})$.

Insbesondere: $\operatorname{Im}(\iota_E) = (\varphi^*)^{-1}(\operatorname{Im}(\iota_D))$.

Beweis. Wir nehmen an, dass ω <u>nicht</u> in $H^0(X, \Omega_{-E})$ liegt.

d.h.: $\exists\, a \in X$ mit $\operatorname{ord}_a(\omega) < E(a)$.

Wie im Beweis der Injektivität, (U_1, z) um a mit $z(a) = 0$

$U_2 = X \setminus \{a\}$, $\qquad \omega|_{U_1} = f\,dz$

$\mathcal{U} = (U_1, U_2)$

$\eta = ((zf)^{-1}, 0) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$

$\xi = [\delta(\eta)] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$

Denn $\langle \omega, \xi \rangle = 1$. Aber:

$\operatorname{ord}_a(\omega) < E(a) \Rightarrow \eta \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_E) \Rightarrow \varphi(\xi) = [\delta\eta] = 0$ in $H^1(X, \mathcal{O}_E)$.

$\langle \omega, \xi \rangle = \underbrace{\iota_D(\omega)}_{=\varphi^*(\lambda)}(\xi) = \varphi^*(\lambda)(\xi) = \lambda(\varphi(\xi)) = 0.$ Widerspruch. $\square$.

Seien D, A Divisoren auf X und $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_A)$

ψ induziert
$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{D-A} &\xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D \\ f &\longmapsto \psi f \end{aligned}$$

und daher $\quad m_\psi : H^1(X, \mathcal{O}_{D-A}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$

Lemma 2

1) Das Quadrat
$$\begin{array}{ccc} H^1(X,\mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{m_\psi^*} & H^1(X,\mathcal{O}_{D-A})^* \\ \uparrow{\scriptstyle \iota_D} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_{D-A}} \\ H^0(X,\Omega_{-D}) & \xrightarrow{\omega \mapsto \psi\omega} & H^0(X,\Omega_{-D+A}) \end{array}$$
kommutiert.

2) Ist $\psi \in \mathcal{M}^*(X)$, so ist m_ψ^* injektiv.

Beweis. 1) Folgt aus $\langle \psi\omega, \xi \rangle = \langle \omega, m_\psi^* \xi \rangle$.

2) $(\psi) \geq -A \Rightarrow D - A \leq D + (\psi)$

und $\psi : \mathcal{O}_{D-A} \longrightarrow \mathcal{O}_D$ faktorisiert als

$$\mathcal{O}_{D-A} \subset \mathcal{O}_{D+(\psi)} \underset{f \mapsto \psi f}{\xrightarrow{\cong}} \mathcal{O}_D \qquad \square.$$

induziert Epi. auf H^1

Sei $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$. **Zzd**: $\lambda \in \mathrm{Im}(\iota_D)$

OBdA: X zusammenhängend
$\lambda \neq 0$.

Nach Lemma 1, es genügt einen Divisor $D' \leq D$ zu finden, so daß $\varphi^*(\lambda) \in \mathrm{Im}(\iota_{D'})$, wobei $\varphi: H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$.

Sei P ein Divisor mit $\deg P = 1$.

Sei $D_n := D - nP$, $n \geq 0$.

λ induziert einen Homomorphismus $H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$,
$$\psi \longmapsto m_\psi^*(\lambda)$$
wobei $m_\psi: H^1(X, \mathcal{O}_{D_n}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$

Nach Lemma 2, $\psi \neq 0 \Rightarrow m_\psi^*(\lambda) \neq 0$, d.h., dieser Homomorphismus ist injektiv.

Behauptung: für $n \gg 0$, $\exists\ \psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, $\psi \neq 0$ und $\omega \in \Omega_{-D_n}(X)$ mit $m_\psi^*(\lambda) = \iota_{D_n}(\omega)$.

Sei $D' = D_n - (\psi) \leq D_n + nP = D$
Die Inklusion $\mathcal{O}_{D'} \subset \mathcal{O}_D$ faktorisiert als

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{D'} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "1/\psi"'] & & \mathcal{O}_D \\ & \mathcal{O}_{D_n} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \varphi^*(\lambda) = m_{1/\psi}^* m_\psi^*(\lambda) = m_{1/\psi}^* \iota_{D_n}(\omega) \overset{\text{Lemma 2}}{=} \iota_{D'}\left(\tfrac{1}{\psi}\cdot\omega\right)$$
$\Rightarrow \varphi^*(\lambda) \in \mathrm{Im}(\iota_{D'})$, wie gewünscht.

Beweis der Behauptung:

R-R Berechnungen:

$$\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$$

- $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) \geq 1 - g + n$
- $\dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) \underset{\iota_{D_n} \text{ injektiv}}{=} \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{-D_n+K})$

  $\geq 1 - g + \deg(K-D) + n$
- $\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg(D_n) + \underbrace{\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D_n})}_{=0 \text{ wenn } n > \deg D}$

$$\Longrightarrow \dim H^0(X, \mathcal{O}_{nP}) + \dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) \geq 2 - 2g + \deg(K-D) + 2n$$

$$\underset{n \gg 0}{>} g - 1 - \deg(D) + n = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

$\Longrightarrow$ Behauptung. □

<u>Korollar</u>: X kompakt, $D \in \operatorname{Div}(X)$, $\exists$ kanonischer Isomorphismus

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*$$

Beweis. Sei K ein kanonischer Divisor. Denn

$$\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}, \qquad \mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-D-K}$$ □.

<u>Korollar</u> X kompakt und z.h. $\Longrightarrow \operatorname{Res}: H^1(X, \Omega) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$.

Beweis. $H^1(X, \Omega) \cong H^0(X, \mathcal{O})^*$ hat Dimension 1 und Res ist nicht identisch null. □.

<u>Korollar</u> X z.h. kompakt vom Geschlecht g, K ein kanonischer Divisor auf X.

Dann $\deg(K) = 2g - 2$.

Beweis. $K = (\omega)$, $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^* \Longrightarrow \Omega_{-K} \cong \mathcal{O}$

R-R: $\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg K$

$\|$ Serre

$\dim H^1(X, \mathcal{O}) - \dim H^0(X, \mathcal{O}) = g - 1$ □

<u>Korollar</u> Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann $g(\mathbb{C}/\Gamma) = 1$.

Beweis. $\exists$ holomorphe Diff'form dz auf $\mathbb{C}/\Gamma$, mit keine Nullstellen.

$$\Longrightarrow \quad 2g - 2 = \deg(dz) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g = 1. \qquad \square$$

Die Riemann-Hurwitzsche Formel

Seien X, Y zwei kompakte Riemannsche Flächen, und

$f : X \longrightarrow Y$ eine nirgends-konstante holomorphe Abbildung

(d.h. eine verzweigte Überlagerung)

Die <u>Verzweigungsordnung</u> von f in einem Punkt $x \in X$ ist

$$b(f,x) := v(f,x) - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

so dass $b(f,x) = 0 \iff f$ ist unverzweigt in x.

Da X kompakt ist, $\{x \in X \mid b(f,x) > 0\}$ ist endlich.

Die <u>Gesamtverzweigungsordnung</u> von f ist

$$b(f) = \sum_{x \in X} b(f,x).$$

<u>Satz</u> (Riemann-Hurwitzsche Formel) (X, Y z.h.)

$$g(X) - 1 = n(g(Y) - 1) + \tfrac{1}{2} b(f)$$

Insbesondere, ist f unverzweigt, so gilt $g(X) - 1 = n(g(Y) - 1)$.

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)^* \implies f^*(\omega) \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^*$

Also
$$\deg(\omega) = 2g(Y) - 2$$
$$\deg(f^*(\omega)) = 2g(X) - 2.$$

Sei $x \in X$, $y = f(x)$.

Nach der lokalen Gestalt holomorpher Abbildungen, gibt es Karten (U, z) um x und (V, w) um y mit $z(x) = 0$, $w(y) = 0$, $f(U) \subset V$, so daß

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "z"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "a \mapsto a^k"] \\ V \arrow[r, "w"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$
wobei $k = v(f, x)$.

Man kann schreiben $\omega|_V = h(w)\, dw$

$$\implies f^*(\omega)|_U = h(z^k)\, d(z^k) = h(z^k)\, k z^{k-1}\, dz$$

Also
$$\operatorname{ord}_x(f^*\omega) = k \cdot \operatorname{ord}_y(\omega) + k - 1$$
$$= v(f, x) \cdot \operatorname{ord}_y(\omega) + b(f, x)$$

Nach dem Struktursatz für verzweigte Überlagerungen $\sum_{x \in f^{-1}(y)} v(f, x) = n$

$$\overset{\sum_{x \in f^{-1}(y)}}{\implies} \quad \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{ord}_x(f^*\omega) = n \cdot \operatorname{ord}_y(\omega) + \sum_{x \in f^{-1}(y)} b(f, x)$$

$$\overset{\sum_{y \in Y}}{\implies} \quad \deg(f^*\omega) = n \cdot \deg(\omega) + b(f).$$

also
$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + b(f). \qquad \square$$

Korollar Sei $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ eine n-blättrige verzweigte Überlagerung. Dann

$$g(X) = \frac{1}{2} b(\pi) - n + 1.$$

Beispiel Hyperelliptische Kurven

$\pi : X \to \mathbb{P}^1$ mit $\mathcal{M}(X) \cong \mathbb{C}(z)[T]/(T^2 - p(z))$

$\mathbb{P}^1[\sqrt{p(z)}]$ wobei $p(z) = (z-a_1)\cdots(z-c_k)$, $a_i \neq a_j$.

$n = 2 \Rightarrow g(X) = b/2 - 1$

$$b = k + \underbrace{\sum_{x \in \pi^{-1}(\infty)} b(\pi, x)}_{= \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ 1 & k \text{ ungerade.} \end{cases}}$$

Klassifikation von kompakten Riemannschen Flächen

g	Flächen	Modulraum M_g
0	nur $\mathbb{P}^1$	$M_0 = *$
1	Tori $\mathbb{C}/\Gamma$ $\cong \mathbb{P}^1[\sqrt{p(z)}]$ mit $\deg p(z) = 3$	$M_1 = \mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ ⋮
2	$\mathbb{P}^1[\sqrt{p(z)}]$ mit $\deg p(z) = 5$	Teichmüllerräume ...
3	$\mathbb{P}^1[\sqrt{p(z)}]$ mit $\deg p(z) = 7$ <u>und</u> weitere Flächen ...	

die Menge aller Biholo. Klassen von Flächen von Geschlecht g.

...