SoSe 21 Riemannsche Flächen. Übungsblatt 1

1.1. (Einpunkt-Kompaktifizierung) Ein topologischer Raum heißt *lokalkompact*, falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffscher Raum, der nicht kompakt ist. Die *Einpunkt-Kompaktifizierung* von X ist die Menge $X \cup \{\infty\}$, wobei $\infty \notin X$ ein neues Symbol ist, mit folgender Topologie:

$$\{U \mid U \subset X \text{ offen}\} \cup \{(X \cup \{\infty\}) \setminus K \mid K \subset X \text{ kompakt}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $X \cup \{\infty\}$ ein kompakter Hausdorffscher topologischer Raum ist.

Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die n-dimensionale Einheitssphäre. Die *stereographische Projektion* ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} \sigma\colon S^n &\to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) & \text{falls } x_{n+1} \neq 1, \\ \infty & \text{falls } x_{n+1} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sigma\colon S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ein Homöomorphismus ist.

1.2. Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\overline{\mathbb{D}}$ ihre abgeschlossene Hülle. Man zeige die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ sind diffeomorph aber nicht biholomorph.

(b) $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ sind diffeomorph aber nicht biholomorph.

1.3. (Zu komplexer Struktur) Zwei eindimensionale komplexe Atlanten $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ auf einem topologischen Raum X heißen *äquivalent*, in Zeichen $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}'$, falls $\mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ ein komplexer Atlas ist. (Erinnerung: Ein eindimensionaler komplexer Atlas auf X is eine Menge von Homöomorphismen $\{\varphi_i\colon U_i \to V_i\}_{i \in I}$, wobei U_i und V_i offene Teilmengen von X bzw. $\mathbb{C}$ sind, so dass alle Kartenwechsel $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ holomorph sind).

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eigentlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller eindimensionalen komplexen Atlanten ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen *maximalen* Atlas enthält (das heißt, einen Atlas $\mathcal{U}_{\max}$, so dass $\mathcal{U} \sim \mathcal{U}_{\max} \Rightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_{\max}$).

1.4. Sei X eine Riemannsche Fläche und Y ein topologischer Raum. Sei $f\colon Y \to X$ ein *lokaler Homöomorphismus* (das heißt, jeder $y \in Y$ besitzt eine offene Umgebung V, so dass $f|_V$ ein Homöomorphismus auf einer offenen Teilmenge von X ist). Zeigen Sie, dass Y eine eindeutige komplexe Struktur besitzt, so dass f holomorph ist.

Insbesondere: Jede offene Teilmenge $U \subset X$ besitzt eine eindeutige komplexe Struktur, so dass die Inklusionsabbildung $U \to X$ holomorph ist.