SoSe 21 Riemannsche Flächen. Übungsblatt 10

10.1. Seien (U, z_1) und (U, z_2) zwei Karten auf einer Riemannschen Fläche X und

$$\varphi\colon z_1(U) \xrightarrow{\cong} z_2(U)$$

der Kartenwechsel.

(a) Zeigen Sie, dass $dz_2 = (\varphi' \circ z_1)dz_1$. Was ist die entsprechende Formel für $d\bar{z}_i$?

(b) Schießen Sie daraus, dass die Ordnung $\mathrm{ord}_a(\omega) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ einer holomorphen Differentialform $\omega \in \Omega(X \setminus \{a\})$ sinnvoll ist.

10.2. (Rücktransport von Differentialformen)

(a) Sei $p\colon Y \to X$ eine glatte Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Zeigen Sie, dass es wohldefinierte Abbildungen

$$p^*\colon \mathcal{E}^{(i)}(X) \to \mathcal{E}^{(i)}(Y) \qquad (i = 1, 2)$$

gibt mit folgenden Eigenschaften: Für alle offenen Teilmengen $U \subset X$,

$$\begin{aligned} \omega|_U = hdf \quad &\Rightarrow \quad p^*(\omega)|_{p^{-1}(U)} = (h \circ p)d(f \circ p), \\ \omega|_U = hdf \wedge dg \quad &\Rightarrow \quad p^*(\omega)|_{p^{-1}(U)} = (h \circ p)d(f \circ p) \wedge d(g \circ p). \end{aligned}$$

(b) Sei $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$ und $\omega \in \Omega(\mathbb{C}^*)$ die holomorphe Differentialform $\frac{dz}{z}$. Bestimmen Sie $\exp^*(\omega) \in \Omega(\mathbb{C})$.

10.3. Sei X eine Riemannsche Fläche, $f \in \mathcal{E}(X)$ eine glatte Funktion und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine glatte Differentialform erster Ordnung. Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften der Operatoren d, ∂, und $\bar{\partial}$:

(a) $d^2 f = \partial^2 f = \bar{\partial}^2 f = 0$

(b) $df = \partial f + \bar{\partial} f$, $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega$

(c) $\partial\bar{\partial} f = -\bar{\partial}\partial f$

(d) (Leibniz-Regel) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$, und ebenso mit ∂ und $\bar{\partial}$

10.4. Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, $a \in X$ und $b = f(a) \in Y$. Sei $\omega \in \Omega(Y \setminus \{b\})$ eine holomorphe Differentialform. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}_a(f^*\omega) = v(f, a) \cdot \mathrm{Res}_b(\omega),$$

wobei $v(f, a)$ die Windungszahl von f im Punkt a ist.