11.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $c\colon I \to U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ eine Differentialform erster Ordnung auf U. Das Integral von ω über c ist bekanntlich

$$\int_c \omega := \int_0^1 \Big((f \circ c)(t)(x \circ c)'(t) + (g \circ c)(t)(y \circ c)'(t) \Big) dt,$$

wobei $\omega = f dx + g dy$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $V \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $\varphi\colon V \to U$ ein glatter Diffeomorphismus. Dann

$$\int_c \omega = \int_{c \circ \varphi^{-1}} \varphi^* \omega.$$

(b) Sei $\omega = f dz$ eine Differentialform vom Typ $(1,0)$. Dann

$$\int_c \omega = \int_0^1 f(c(t))c'(t) dt.$$

Das heißt, $\int_c f dz$ ist das Kurvenintegral von f über c im üblichen Sinn.

11.2. (Perioden) Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass jeder Weg $c\colon I \to X$ zu einem glatten Weg homotop ist (das ist ein Sonderfall der glatten Approximation von stetigen Abbildungen).

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene 1-Form auf X und $a \in X$. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus

$$P_\omega\colon \pi_1(X, a) \to \mathbb{C},$$

so dass $P_\omega([c]) = \int_c \omega$ für jede stückweise C^1 Schleife c am Punkt a. Außerdem ist das Bild von P_ω unabhängig vom Punkt a.

(b) Eine geschlossene Form ω is genau dann exakt (d.h., besitzt eine Stammfunktion), wenn $\mathrm{Im}(P_\omega) = \{0\}$.

Hinweis. Sei $u\colon \tilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung und $G = \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$, so dass $X \cong \tilde{X}/G$. Sei F eine Stammfunktion von $u^*(\omega)$. Betrachten Sie die Differenz $F \circ \sigma - F$ für jede Decktransformation $\sigma \in G$.

(c) Wenn X kompakt ist, die Abbildung

$$\Omega(X) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{C}), \quad \omega \mapsto P_\omega$$

ist injektiv, wobei „Hom“ die Menge aller Gruppenhomomorphismen bezeichnet.

Die komplexe Zahlen im Bild von P_ω heißen die *Perioden* von ω. Hier sind zwei Beispiele:

(d) Berechnen Sie die Perioden der holomorphen Form $\frac{dz}{z}$ auf $\mathbb{C}^*$.

(e) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Form $\omega \in \Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$ mit $\pi^*(\omega) = dz$ existiert, und dass $\mathrm{Im}(P_\omega) = \Gamma$.

11.3. Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und $u\colon \tilde{X} \to X$ ihre universelle Überlagerung. Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ eine meromorphe Differentialform, deren Residuen alle null sind. Zeigen Sie, dass $u^*(\omega)$ eine Stammfunktion besitzt, das heißt, eine meromorphe Funktion $F \in \mathcal{M}(\tilde{X})$ mit $dF = u^*(\omega)$.