12.1. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und sei

$$X = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Leray mit einer geeigneten Überdeckung von X.

12.2. (De-Rham-Berechnungen)

(a) Zeigen Sie, dass $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ ein 1-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, der von der Klasse von $d \log z = \frac{dz}{z}$ erzeugt wird.

Hinweis. Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathbb{C}^*)$ eine geschlossene 1-Form. Finden Sie $c \in \mathbb{C}$, so dass alle Perioden von $\omega - c\, d \log z$ null sind, und verwenden Sie Aufgabe 11.2(b).

(b) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Zeigen Sie, dass $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}/\Gamma, \mathbb{C})$ 2-dimensional ist, und von den Klassen von dz und $d\bar{z}$ erzeugt wird.

12.3. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $H^1(X, \mathbb{Z})$ eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe ist.

(a) Sei I eine endliche Menge und seien $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ und $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in I}$ zwei offene Überdeckungen von X, so dass $\overline{V}_i$ kompakt und in U_i enthalten ist. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Im}\left(Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathbb{Z})\right)$$

eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist.

(b) Schließen Sie daraus, dass $H^1(X, \mathbb{Z})$ endlich erzeugt ist.

Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Leray und (a).

(c) Zeigen Sie, dass die Inklusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ einen injektiven Homomorphismus $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{C})$ induziert, und damit dass $H^1(X, \mathbb{Z})$ auch frei ist.

12.4. (Torsore) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{G}$ eine Garbe von Gruppen auf X. Ein $\mathcal{G}$-*Torsor* ist eine Garbe $\mathcal{P}$ von Mengen auf X mit einer Linksoperation $\mathcal{G} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, die lokal trivial ist im folgenden Sinn: jeder Punkt besitzt eine offene Umgebung U mit einem $\mathcal{G}|_U$-äquivarianten Isomorphismus $\mathcal{P}|_U \cong \mathcal{G}|_U$. Ein *Isomorphismus* zwischen $\mathcal{G}$-Torsoren ist ein $\mathcal{G}$-äquivarianter Garbenisomorphismus.

Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X. Zeigen Sie, dass

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \{\text{Isomorphieklassen von } \mathcal{F}\text{-Torsoren}\}.$$

Bemerkung. Die rechte Seite ist sinnvoll, selbst wenn $\mathcal{F}$ nicht abelsch ist. So kann man die erste Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in einer nicht-abelschen Gruppe definieren.