SoSe 21 Riemannsche Flächen. Übungsblatt 13

13.1. Sei X eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche und D ein effektiver Divisor auf X (das heißt, $D \geq 0$). Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_D) \leq 1 + \deg D.$$

Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Riemmann–Roch und die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{H}^0_D \to 0$.

13.2. (Kohomologie von Divisoren auf $\mathbb{P}^1$) Sei D ein Divisor auf $\mathbb{P}^1$. Zeigen Sie:

(a) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \deg D \leq -1, \\ 1 + \deg D, & \text{falls } \deg D > -1. \end{cases}$

(b) $\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \deg D \geq -1, \\ -1 - \deg D, & \text{falls } \deg D < -1. \end{cases}$

13.3. Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $a \in \mathbb{C}/\Gamma$ ein Punkt und D der zugeordnete Divisor:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = a, \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{C}/\Gamma, \mathcal{O}_{nD}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n < 0, \\ 1, & \text{falls } n = 0, \\ n, & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Hinweis. Sie dürfen annehmen, dass $g(\mathbb{C}/\Gamma) = 1$. Der Riemann–Rochsche Satz gibt dann die Ungleichung

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{C}/\Gamma, \mathcal{O}_{nD}) \geq n.$$

Für die andere Ungleichung im Fall $n \geq 2$, man betrachte n Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ in $H^0(\mathbb{C}/\Gamma, \mathcal{O}_{nD})$ und ihre Bilder im $(n-1)$-dimensionalen Vektorraum $(\mathcal{H}^D_{nD})_a$.

13.4. (Garbe von Divisoren) Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{D}\mathrm{iv}$ die Prägarbe von Divisoren auf X, das heißt,

$$\mathcal{D}\mathrm{iv}(U) := \mathrm{Div}(U)$$

mit den offenbaren Beschränkungsabbildungen. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Prägarbe $\mathcal{D}\mathrm{iv}$ ist eine Garbe, und die Gruppenhomomorphismen

$$\mathrm{ord}\colon \mathcal{M}(U)^* \to \mathrm{Div}(U)$$

definieren einen Garbenmorphismus $\mathrm{ord}\colon \mathcal{M}^* \to \mathcal{D}\mathrm{iv}$.

(b) Es gilt $H^1(X, \mathcal{D}\mathrm{iv}) = 0$.

Hinweis. Der Beweis für die Garbe $\mathcal{E}$ läßt sich anpassen.

(c) Die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{D}\mathrm{iv} \to 0$$

ist exakt. Insbesondere gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}(X)^* \to \mathcal{M}(X)^* \to \mathrm{Div}(X) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^1(X, \mathcal{M}^*) \to 0.$$