2.1. (Möbiustransformationen)

(a) Sei
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$
eine reguläre 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Formel
$$\mu_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}^1$ definiert.

Die Abbildungen $\mu_A \colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ heißen *Möbiustransformationen*.

(b) Man zeige, dass $\mu_I = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^1}$ und $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Insbesondere ist μ_A ein Biholomorphismus mit $\mu_A^{-1} = \mu_{A^{-1}}$.

(c) Sei $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ die Gruppe aller Biholomorphismen $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus
$$\mu \colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1), \quad A \mapsto \mu_A$$
surjektiv ist, mit Kern $\mathbb{C}^* \cdot I$. Er induziert also einen Isomorphismus
$$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1),$$
wobei $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \cdot I$.

Hinweis. Wir wissen schon, dass jeder $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ eine rationale Funktion ist.

(d) Zeigen Sie, dass die komplexe Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ biholomorph sind.

2.2. (Doppeltperiodische Funktionen) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Eine Abbildung $f \colon \mathbb{C} \to X$ heißt *doppeltperiodisch* bzgl. Γ, falls $f(z) = f(z+\omega)$ für jede $z \in \mathbb{C}$ und $\omega \in \Gamma$. Dann induziert f eine Abbildung $\bar{f} \colon \mathbb{C}/\Gamma \to X$ mit $\bar{f} \circ \pi = f$, wobei $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ holomorph ist.

(b) Sei X eine Riemannsche Fläche und $f \colon \mathbb{C} \to X$ eine doppeltperiodische holomorphe Abbildung. Man zeige, dass $\bar{f} \colon \mathbb{C}/\Gamma \to X$ wieder holomorph ist. Insbesondere: Jede doppeltperiodische meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ induziert eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}/\Gamma$.

(c) Zeigen Sie, dass jede doppeltperiodische holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ konstant ist, und dass jede nichtkonstante doppeltperiodische meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ surjektiv auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist.

2.3. (Biholomorphismen zwischen Tori) Ein *komplexer Torus* ist eine Riemannsche Fläche der Gestalt $\mathbb{C}/\Gamma$ mit einem gewissen Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass jeder komplexe Torus zu einem Torus der Gestalt $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ biholomorph ist.

Hinweis. Sind $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\alpha \in \mathbb{C}^*$, so sind die Tori $\mathbb{C}/\Gamma$ und $\mathbb{C}/\alpha\Gamma$ biholomorph.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

eine ganze Matrix mit $ad - bc = 1$. Sei $\tau \in \mathbb{H}$ und

$$\tau' = \mu_A(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Zeigen Sie, dass die Tori $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ und $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau')$ biholomorph sind.

Bemerkung. Später werden wir zeigen, dass $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ und $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau')$ *genau dann* biholomorph sind, wenn eine Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\mu_A(\tau) = \tau'$ existiert. Deshalb gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\cong \{\text{komplexe Tori bis auf Isomorphie}\}, \\ \tau &\mapsto \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau), \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H}$ operiert.