SoSe 21 Riemannsche Flächen. Übungsblatt 3

3.1. (Diskrete Bewertungen) Sei K ein Körper. Eine *diskrete Bewertung* auf K ist eine Abbildung $v\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften (für alle $a, b \in K$):

1. $v(a) = +\infty \Leftrightarrow a = 0$
2. $v(ab) = v(a) + v(b)$
3. $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

(a) Sei k ein Körper und $k(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $k[t]$. Man definiert

$$\deg\colon k(t) \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad \deg(p(t)/q(t)) = \deg(p(t)) - \deg(q(t)),$$

mit $\deg(0) = -\infty$. Zeigen Sie, dass $-\deg$ eine diskrete Bewertung auf $k(t)$ ist.

(b) Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und $x \in X$. Zeigen Sie, dass die Ordnungsabbildung

$$\mathrm{ord}_x\colon \mathcal{M}(X) \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

eine diskrete Bewertung auf $\mathcal{M}(X)$ ist.

(c) Welche Beziehung besteht zwischen (a) mit $k = \mathbb{C}$ und (b) mit $X = \mathbb{P}^1$?

3.2.

(a) Zeigen Sie, dass die eigentliche holomorphe Abbildungen $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau die nicht-konstanten Polynome sind.

(b) Sei $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ die Menge aller Biholomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{a + bz \mid a, b \in \mathbb{C},\ b \neq 0\}.$$

(c) Für ein nicht-konstantes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, bestimmen Sie die Verzweigungspunkte von $p\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

3.3. Man betrachte die meromorphe Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ auf $\mathbb{C}$. Man zeige, dass $\tan(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm i\}$ und dass $\tan\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\pm i\}$ eine Überlagerung ist.

3.4. (Weierstraßsche $\wp$-Funktion) Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Die *Weierstraßsche $\wp$-Funktion* bzgl. Γ ist

$$\wp_\Gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\wp_\Gamma$ eine doppeltperiodische meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ bzgl. Γ ist, mit Polstellenmenge Γ.

Hinweis. Sie dürfen annehmen, dass die Summe $\sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 2$. Sei $R > 0$. Zeigen Sie zuerst, dass die Summe

$$\sum_{\substack{\omega \in \Gamma \setminus \{0\} \\ |\omega| \geq R}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

auf der Scheibe $|z| < R$ gleichmäßig konvergiert, und damit eine holomorphe Funktion darauf definiert. Um zu beweisen, dass $\wp_\Gamma$ doppeltperiodisch ist, betrachten Sie die Ableitung $\wp'_\Gamma$.

(b) Man betrachte die induzierte holomorphe Abbildung $\wp_\Gamma\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^1$. Wie viele Nullstellen hat sie, mit Vielfachheit gerechnet?

(c) Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine doppeltperiodische meromorphe Funktion bzgl. Γ, deren Pollstellenmenge genau Γ ist und deren Laurentreihenentwicklung um 0 folgende Gestalt hat:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k.$$

Zeigen Sie, dass $f = \wp_\Gamma$.

Hinweis. Betrachten Sie die Differenz $f - \wp_\Gamma$ auf $\mathbb{C}/\Gamma$.