4.1. (Überlagerungen) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $p\colon Y \to X$ und $p'\colon Y' \to X'$ Überlagerungen, so ist $p \times p'\colon Y \times Y' \to X \times X'$ eine Überlagerung.

(b) Sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und $f\colon X' \to X$ eine beliebige stetige Abbildung. Sei

$$Y' = X' \times_X Y = \{(x', y) \mid f(x') = p(y)\} \subset X' \times Y$$

das Faserprodukt von X' und Y über X. Dann ist die Projektion $p'\colon Y' \to X'$ eine Überlagerung.

(c) Sind $p\colon Y \to X$ und $p'\colon Y' \to X$ Überlagerungen, so ist $Y \times_X Y' \to X$ eine Überlagerung.

Hinweis. $Y \times_X Y' = X \times_{X \times X} (Y \times Y')$.

Wir betrachten nun ein kommutatives Dreieck stetiger Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

(d) Wir setzen voraus, dass X lokal zusammenhängend ist. Sind p und q Überlagerungen, so ist f eine Überlagerung.

(e) Wir setzen voraus, dass die Fasern von p endlich sind. Sind p und f Überlagerungen, so ist q eine Überlagerung.

4.2. Man beweise, dass $\mathbb{P}^1$ einfach zusammenhängend ist.

Hinweis. Wegen der stereographischen Projektion ist jede Schleife am Südpol, die den Nordpol nicht durchläuft, nullhomotop. Zeigen Sie, dass jede Schleife am Südpol zu einer solchen Schleife homotop ist.

Hinweis für den Hinweis. I ist kompakt.

4.3. (Monodromieoperation) Es sei $p\colon Y \to X$ eine Überlagerung und $x_0 \in X$. Zu jedem Weg $\alpha\colon I \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$ und zu jedem Punkt $y \in p^{-1}(x_0)$ gibt es bekanntlich *genau eine* Liftung $\hat{\alpha}_y\colon I \to Y$ von α mit $\hat{\alpha}_y(0) = y$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\to p^{-1}(x_0) \\ (y, [\alpha]) &\mapsto y[\alpha] := \hat{\alpha}_y(1) \end{aligned}$$

eine Rechtsoperation der Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$ definiert.

(b) Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus

$$p_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

injektiv ist, und dass $[\alpha]$ und $[\beta]$ genau dann rechtskongruent modulo $\operatorname{Im} p_*$ sind (das heißt, $[\alpha][\beta]^{-1} \in \operatorname{Im} p_*$), wenn $y_0[\alpha] = y_0[\beta]$. Insbesondere identifiziert p_* die Gruppe $\pi_1(Y, y_0)$ mit dem Stabilisator von y_0 bzgl. der Operation von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$.

(c) Sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Zeigen Sie, dass die Bahn von y_0 in $p^{-1}(x_0)$ genau aus diesen Punkten betsteht, die in der Wegzusammenhangskomponente von y_0 enthalten sind.

Bemerkung. Die Aussagen (b) und (c) können durch die folgende „exakte Sequenz“ zusammengefasst werden:

$$1 \to \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0) \to \pi_0(Y) \to \pi_0(X),$$

wobei $\pi_0(-)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten bezeichnet. Diese Sequenz ist der Anfang der langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen einer Faserung.

4.4. (Berechnungen von Fundamentalgruppen)

(a) Zeigen Sie, mithilfe der Überlagerung $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \\ n &\mapsto [t \mapsto e^{2\pi i n t}] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

(b) Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, mithilfe der Überlagerung $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\to \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma, 0) \\ (n_1, n_2) &\mapsto [t \mapsto t(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.