5.1. Sei X ein topologischer Raum und G eine Gruppe, die stetig auf X von links operiert. Sei $\pi\colon X \to X/G$ die kanonische Projektion. Wir setzen voraus, dass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $U \cap gU = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass π eine Überlagerung ist.

(b) Falls X zusammenhängend ist, zeigen Sie, dass π eine Galoissche Überlagerung ist, deren Decktransformationsgruppe zu G isomorph ist.

5.2. (Klassifikation komplexer Tori) Nach Aufgabe 2.3 gibt es eine wohldefinierte surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\to \{\text{komplexe Tori bis auf Isomorphie}\}, \\ \tau &\mapsto \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung bijektiv ist.

Hinweis. Seien $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{C}$ zwei Gitter, $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ und $\pi'\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma'$ die kanonische Projektionen und $f\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$ ein Biholomorphismus. Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Biholomorphismus $\hat{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\pi' \circ \hat{f} = f \circ \pi$ und $\hat{f}(0) = 0$ existiert, und verwenden Sie Aufgabe 3.2(b).

5.3. Eine *affine algebraische Varietät* $X \subset \mathbb{C}^n$ ist die Menge der Nullstellen einer Familie von Polynomen $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$:

$$X = Z(f_1, \dots, f_r) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_i(x) = 0 \text{ für } 1 \le i \le r\}.$$

Eine solche Varietät $X \subset \mathbb{C}^n$ heißt *glatt* von Dimension $n - s$ in einem Punkt $x \in X$, falls eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ von x und Polynome $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ existieren, so dass:

- $X \cap U = Z(g_1, \dots, g_s) \cap U$ und
- der Rang der Jacobi-Matrix $J(g_1, \dots, g_s)(x) \in M_{s \times n}(\mathbb{C})$ gleich s ist.

Beispiel. Die Varietät $Z(z_1 z_2) \subset \mathbb{C}^2$ ist glatt von Dimension 1 in jedem Punkt $x \neq (0,0)$, aber sie ist nicht glatt im Punkt $(0,0)$. Die Varietät $Z(z_1^3 - z_2^2 + 1)$ ist überall glatt.

Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ eine glatte algebraische Varietät der Dimension 1. Zeigen Sie, dass X eine natürliche Struktur einer Riemannschen Fläche besitzt, damit die n Koordinatenfunktionen $X \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

Hinweis. Verwenden Sie den Satz der impliziten Funktion, um Karten auf X zu definieren. Die Holomorphie der Kartenwechsel kann man durch die Cauchy-Riemannschen Gleichungen überprüfen.

Bemerkung. Ebenso sind glatte Varietäten beliebiger Dimension komplexe Mannigfaltigkeiten (die Kartenwechsel sind nun holomorphe Funktionen mehrerer Veränderlicher).