6.1. Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche.

(a) Sei $p\colon \mathbb{P}^1 \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass p ein Isomorphismus ist.

(b) Sei $p\colon \mathbb{C} \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie, dass X zu $\mathbb{C}$, zu $\mathbb{C}^*$ oder zu einem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ biholomorph ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Galois-Korrespondenz und Aufgaben 2.1(c) und 3.2(b). Für (b) dürfen Sie folgende elementare Aussage benutzen: eine *diskrete* Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$ ist von $\leq n$ Elementen erzeugt.

Bemerkung. Der Riemannsche Abbildungssatz impliziert, dass alle anderen zusammenhängenden Riemannschen Flächen (zum Beispiel $\mathbb{C}$ ohne n Punkte mit $n \geq 2$) von der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ überlagert werden. Insbesondere sind sie alle von der Gestalt $\mathbb{D}/G$, wobei G eine Gruppe von Möbiustransformationen ist, deren Operation auf $\mathbb{D}$ der Bedingung von Aufgabe 5.1 genügt.

6.2. Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, $K \subset \mathbb{C}$ die Menge der kritischen Werten von $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}\backslash K$, und $Y = \mathbb{C}\backslash p^{-1}(K)$. Nach Aufgabe 3.2(a) und dem Struktursatz für verzweigte Überlagerungen ist $p|_Y\colon Y \to X$ eine n-blättrige Überlagerung. Für folgende Polynome $p(z)$, bestimmen Sie die Deckgruppe $\mathrm{Deck}(Y/X)$ und ob $p|_Y$ Galoissch ist:

(a) $p(z) = z^3 - 3$

(b) $p(z) = z^3 - 3z$

(c) $p(z) = (z^2 + 1)^2$

Hinweis. Jede Decktransformation kann zu einer Funktion $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ fortgesetzt werden.

6.3. Sei $X \neq \varnothing$ eine Riemannsche Fläche.

(a) Für eine offene Teilmenge $U \subset X$, sei $\mathcal{B}(U) \subset \mathcal{O}(U)$ die Menge aller beschränkten holomorphen Funktionen auf U. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Unterprägarbe von $\mathcal{O}$ ist, die das Garbenaxiom nicht erfüllt.

(b) Für eine offene Teilmenge $U \subset X$, sei $\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}^*(U)/\exp(\mathcal{O}(U))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Quotientenprägarbe von $\mathcal{O}^*$ ist, die das Garbenaxiom nicht erfüllt.