7.1. (Hyperelliptische Kurven) Sei $n \geq 1$ und $p(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - a_i)$ ein monisches Polynom mit n paarweise verschiedenen Nullstellen. Man betrachte die affine algebraische Varietät

$$X = Z(w^2 - p(z)) = \{(z, w) \mid w^2 = p(z)\} \subset \mathbb{C}^2$$

und die Abbildung $f\colon X \to \mathbb{C}$, $f(z, w) = z$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) X ist glatt und daher eine Riemannsche Fläche (siehe Aufgabe 5.3), und f ist holomorph.

(b) Es gibt eine kompakte Riemmansche Fläche $\bar{X}$, die X als offene Teilmenge enthält, und eine holomorphe Fortsetzung $\bar{f}\colon \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ von f, so dass $\bar{X} \setminus X$ aus genau eins oder zwei Punkten besteht, je nachdem, ob n ungerade oder gerade ist.

Da $\bar{X}$ kompakt ist, ist $\bar{f}$ sogar eine 2-blättrige verzweigte Überlagerung.

(c) Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte von $\bar{f}$.

Die kompakte Fläche $\bar{X}$ heißt die dem Polynom $p(z)$ zugeordnete *hyperelliptische Kurve* (besonders wenn $n \geq 5$; falls $n = 3$ oder 4 ist $\bar{X}$ eine elliptische Kurve).

7.2. Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von Mengen auf X. Die *Vergarbung* $a(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ ist bekanntlich die Garbe der Schnitte der kanonischen Abbildung

$$p_{\mathcal{F}}\colon |\mathcal{F}| \to X.$$

Zeigen Sie:

(a) Der Morphismus

$$\eta\colon \mathcal{F} \to a(\mathcal{F}), \quad \eta_U(f)\colon U \to |\mathcal{F}|, \quad x \mapsto \rho_x(f)$$

ist wohldefiniert und induziert Bijektionen auf allen Halmen: $\eta_x\colon \mathcal{F}_x \cong a(\mathcal{F})_x$.

Insbesondere ist jede Garbe $\mathcal{F}$ zur Garbe der Schnitte des lokalen Homöomorphismus $p_{\mathcal{F}}$ isomorph. Zeigen Sie umgekehrt:

(b) Sei $p\colon Y \to X$ ein lokaler Homöomorphismus und $\mathcal{F}_p$ die Garbe der Schnitte von p. Dann gibt es ein Homöomorphismus $Y \cong |\mathcal{F}_p|$ über X.

Bemerkung. Die Konstruktionen $\mathcal{F} \mapsto p_{\mathcal{F}}$ und $p \mapsto \mathcal{F}_p$ bilden deshalb eine Äquivalenz zwischen Garben auf X und lokalen Homöomorphismen nach X. Unter dieser Äquivalenz, Überlagerungen entsprechen *lokalkonstante* Garben.

7.3. Sei $k \geq 2$ und $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},1}$ der Keim der k-ten Hauptwurzel $\sqrt[k]{z}$, das heißt, der einzige Keim φ mit $\varphi^k = z$ und $\varphi(1) = 1$. Für $n \in \mathbb{Z}$, sei $\alpha_n\colon I \to \mathbb{C}$ die Schleife $t \mapsto e^{2\pi i n t}$. Bestimmen Sie die Keime, die durch analytische Fortsetzung längs der Wege α_n aus φ entstehen.