8.1. Sei X eine Riemannsche Fläche, $x \in X$ und $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ ein holomorpher Funktionskeim. Sei (X_φ, p, f, y) die maximale analytische Fortsetzung von φ, das heißt, X_φ ist die Zusammenhangskomponente von $|\mathcal{O}_X|$, in der φ liegt. Man zeige, dass $p\colon X_\varphi \to X$ genau dann eine Überlagerung ist, wenn φ sich längs jedes Weges analytisch fortsetzen läßt.

8.2. Sei X eine Riemannsche Fläche und $x \in X$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_x = \{\varphi \in \mathcal{O}_{X,x} \mid \varphi(x) = 0\}.$$

Ein Keim $\pi \in \mathfrak{m}_x$ erzeugt das Ideal $\mathfrak{m}_x$ genau dann, wenn x eine Nullstelle erster Ordnung von π ist, das heißt, wenn $v(\pi, x) = 1$.

(b) Die Abbildung $\varphi \mapsto \varphi(x)$ induziert ein Isomorphismus zwischen dem Restklassenkörper $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ und $\mathbb{C}$.

(c) Sei $\pi = [U, g] \in \mathfrak{m}_x$ ein erzeugendes Element. Dann ist die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, $1 \mapsto \pi + \mathfrak{m}_x^2$, ein Isomorphismus. Für die induzierte Abbildung

$$\{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f(x) = 0\} \to \mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \cong \mathbb{C}$$

gilt $f \mapsto (f \circ g^{-1})'(0)$.

8.3. Sei X eine Riemannsche Fläche.

(a) Sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{X,x}$ ein *Henselscher Ring* ist, das heißt: Sei $F(T) \in \mathcal{O}_{X,x}[T]$ ein monisches Polynom und a eine einfache Nullstelle von $F(T)(x) \in \mathbb{C}[T]$. Dann existiert genau eine Nullstelle φ von $F(T)$ in $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $\varphi(0) = a$.

Hinweis. Verwenden Sie den Satz der impliziten Funktion für holomorphe Funktionen, siehe Aufgabe 5.3.

(b) Es sei $F(T) \in \mathcal{O}(X)[T]$ ein monisches Polynom vom Grad n, das n verschiedene Nullstellen in jedem Punkt $x \in X$ besitzt. Sei $X(F) \subset |\mathcal{O}_X|$ die Menge aller holomorphen Funktionskeime ψ mit $F(\psi) = 0$. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung $p\colon X(F) \to X$ eine n-blättrige Überlagerung ist.

Hinweis. Nach (a), jede Faser von p hat genau n Elemente.