9.1. (Verzweigte Überlagerungen der Einheitskreisscheibe) Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche und $\pi\colon X \to D$ eine endliche verzweigte Überlagerung, die über D^* unverzweigt ist. Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl $n \geq 1$ und ein Biholomorphismus $\varphi\colon X \to D$ existieren, so dass $\pi(x) = \varphi(x)^n$ für alle $z \in D$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & D \arrow[dl, "z \mapsto z^n"] \\ & D. & \end{tikzcd}$$

9.2. Das Umkehrproblem der Galoistheorie für einen Körper K fragt, ob jede endliche Gruppe zu der Galoisgruppe einer Erweiterung von K isomorph ist. Im allgemeinen (und besonders wenn $K = \mathbb{Q}$) ist dieses Problem ungelöst.

Zeigen Sie, dass für den Körper $\mathbb{C}(z)$ der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$ ist das Umkehrproblem lösbar, das heißt: Zu jeder endlichen Gruppe G gibt es eine Galoissche Körpererweiterung $L/\mathbb{C}(z)$ mit $G \cong \mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(z))$.

Hinweis. Sie dürfen folgenden Satz aus der Topologie verwenden: für paarweise verschiedene komplexe Zahlen $a_1, \dots, a_n$, die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ ist frei von n Elementen erzeugt. Sie dürfen auch den Riemannschen Existenzsatz verwenden, der impliziert, dass jede verzweigte Überlagerung $\pi\colon Y \to X$ einem Polynom $P(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ zugeordnet wird.

9.3. (Puiseux-Reihen) Sei $\mathbb{C}\{\{z\}\} = \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}$ der Körper der formalen Laurent-Reihen $a(z) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i z^i$ mit positivem Konvergenzradius und endlichem Hauptteil.

(a) Sei

$$F(z,w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$$

ein irreduzibles Polynom mit Koeffizienten $a_i(z)$ im Körper $\mathbb{C}\{\{z\}\}$. Zeigen Sie, dass eine konvergente Laurent-Reihe

$$\varphi(z) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i z^i \in \mathbb{C}\{\{z\}\}$$

existiert, so dass

$$F(z^n, \varphi(z)) = 0$$

in $\mathbb{C}\{\{z\}\}$. Sind außerdem alle Koeffizienten $a_i(z)$ in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ enthalten, so ist $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$.

Hinweis. $F(z,w)$ kann zu einem irreduziblen Polynom $P(z,w) \in \mathcal{M}(D_r)[w]$ fortgesetzt werden, wobei $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$, dessen Koeffizienten auf D_r^* holomorph sind. Betrachten Sie die entsprechende verzweigte Überlagerung von D_r, und verwenden Sie Aufgabe 9.1.

Bemerkung. Man kann auch sagen, dass die Gleichung $F(z,w) = 0$ wird durch die Reihe

$$w = \varphi(\sqrt[n]{z}) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i z^{i/n}$$

gelöst. Eine solche Potenzreihe mit gebrochenen Exponenten heißt *Puiseux-Reihe.*

(b) Sei $F(z,w) = w^2 - z^3 w + z$. Zeigen Sie, dass das Polynom $F(z,w) \in \mathbb{C}\{\{z\}\}[w]$ irreduzibel ist, und bestimmen Sie $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$, so dass $F(z^2, \varphi(z)) = 0$.