Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
28.04.2022

Lineare Algebra II
Präsenzübungsblatt
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. Sei $p = \sum_{i=0}^n c_i T^i \in K[T]$ ein Polynom über K und sei $A \in M_n(K)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(A)$.

(b) Ist A diagonalisierbar, so ist auch $p(A)$ diagonalisierbar.

Hinweis. Es gibt mehrere Strategien: Zeigen Sie, dass $\mu_{p(A)}^{\mathrm{geom}}(p(\lambda)) \geq \mu_A^{\mathrm{geom}}(\lambda)$ für alle $\lambda \in K$, oder dass $p(S^{-1}AS) = S^{-1}p(A)S$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Aufgabe 2. Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$ eine quadratische Matrix und sei $b_A \colon K^n \times K^n \to K$ die zugehörige Bilinearform. Man weiß, dass b_A genau dann symmetrisch ist, wenn die Matrix A symmetrisch ist, d.h., wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Welche Eigenschaft der Matrix A entspricht der Eigenschaft, dass die Form b_A antisymmetrisch bzw. alternierend ist?

Zur Erinnerung: Eine Bilinearform $b \colon V \times V \to K$ heißt antisymmetrisch, wenn $b(v, w) = -b(w, v)$ für alle $v, w \in V$, und sie heißt alternierend, wenn $b(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Jede alternierende Form ist antisymmetrisch, und die Umkehrung gilt, wenn $\operatorname{char} K \neq 2$.

Aufgabe 3. (Monomorphismen und Epimorphismen) Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f \colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ heißt:

- *Monomorphismus*, wenn folgendes gilt: Für alle Morphismen $g, h \colon Z \to X$, aus $f \circ g = f \circ h$ folgt bereits $g = h$.
- *Epimorphismus*, wenn folgendes gilt: Für alle Morphismen $g, h \colon Y \to Z$, aus $g \circ f = h \circ f$ folgt bereits $g = h$.

Diese Begriffe sind eine Abstraktion der Injektivität bzw. der Surjektivität einer Abbildung. Beweisen Sie dazu: Wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie von Mengen oder die von K-Vektorräumen ist, dann ist ein Morphismus genau dann ein Monomorphismus bzw. ein Epimorphismus, wenn es injektiv bzw. surjektiv ist.

Aufgabe 4. (Gruppenoperationen) Sei G eine Gruppe. Wir betrachten die zugehörige Kategorie BG, die ein einziges Objekt $*$ besitzt mit $\mathrm{Mor}_{BG}(*, *) = G$, und in der die Komposition die Verknüpfung von G ist, d.h., $g \circ h = g \cdot h$.

Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Eine *Operation* der Gruppe G auf einem Object X von $\mathcal{C}$ ist ein Funktor

$$F \colon BG \to \mathcal{C} \quad \text{mit} \quad F(*) = X.$$

(a) Machen Sie diese Definition konkreter, wenn $\mathcal{C}$ die Kategorie von Mengen ist: Eine Operation von G auf einer Menge X ist eine Verknüpfung $G \times X \to X$, so dass ...

(b) Eine *Involution* eines Objekts X von $\mathcal{C}$ ist ein Morphismus $\sigma \colon X \to X$ mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_X$. Zeigen Sie, dass eine Involution σ von X eine Operation der symmetrischen Gruppe $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ auf X definiert, wobei τ auf σ abgebildet wird.