Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
28.04.2022

Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

Abgabe: Do. 05.05.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $b_A(x, y) = x^\intercal A y$ für die folgenden Paare (x, y):

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

Einstiegsaufgabe B. Man betrachte die Bilinearform

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad b(x, y) = 2x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[b]_{B,B}$ für die folgenden Basen B:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 1. (1+1+1+1 Punkte) Finden Sie jeweils eine Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den gegebenen Eigenschaften, oder zeigen Sie, dass keine solche Form existiert:

(a) b ist nicht ausgeartet, $b(e_1, e_1) = 0$ und $b(e_1, e_2) = 0$.

(b) b ist alternierend und nicht ausgeartet.

(c) b ist symmetrisch und ausgeartet, $b(e_1, e_1) > 0$ und $b(e_2, e_2) > 0$.

(d) b ist symmetrisch und ausgeartet, $b(e_1, e_1) > 0$ und $b(e_2, e_2) < 0$.

Aufgabe 2. (1+1+1+1+1+1 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Abbildungen $b\colon V \times W \to \mathbb{R}$ bilinear sind:

(a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $b(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2$

(b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $b(x, y) = x_1y_1 + x_1x_2$

(c) $V = W = M_{1000}(\mathbb{R})$, $b(A, B) = \operatorname{tr}(A \cdot B)$

(d) $V = W = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $b(f, g) = (f + g)(1)$

(e) $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}$, $b(f, x) = f(x)$

(f) $V = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}^2$, $b(f, x) = \int_0^1 (x_1 f(t) + x_2 f'(t))dt$

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum. Ein Paar (U, W) von Untervektorräumen von V heißt eine *direkte Zerlegung* von V, wenn $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$ (dann ist V zu der direkten Summe $U \oplus W$ isomorph). Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *Projektor*, wenn $f^2 = f$.

(a) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Projektor. Zeigen Sie, dass $(\ker f, \operatorname{im} f)$ eine direkte Zerlegung von V ist.

(b) Sei umgekehrt (U, W) eine direkte Zerlegung von V. Zeigen Sie, dass es genau einen Projektor $f \in \mathrm{End}_K(V)$ existiert, so dass $\ker f = U$ und $\operatorname{im} f = W$. Anders gesagt ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$\{\text{Projektoren } V \to V\} \to \{\text{direkte Zerlegungen von } V\},$$
$$f \mapsto (\ker f, \operatorname{im} f).$$

(c) Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$, so dass $L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Projektor ist mit $\operatorname{im} L_A = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.