Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
30.06.2022

Lineare Algebra II
10. Übungsblatt

Abgabe: Do. 07.07.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Bringen Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{Z}$ auf Smith-Normalform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 108 Elementen bis auf Isomorphie.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass

$$\ell_K(V) = \dim_K(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Aufgabe 2. (3 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie, dass

$$|\mathbb{Z}^n / \operatorname{im} L_A| = \begin{cases} |\det(A)|, & \text{falls } \det(A) \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } \det(A) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3. (1+2 Punkte) Sei R ein Hauptidealring und sei $M \subset R^3$ ein Untermodul. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel.

(a) Ist (x_1, x_2, x_3) eine Basis von R^3, so gibt es Skalare $r_1, r_2, r_3 \in R$ mit $M = \operatorname{Span}_R\{r_1x_1, r_2x_2, r_3x_3\}$.

(b) Es gibt eine Basis (x_1, x_2, x_3) von R^3 und Skalare $r_1, r_2, r_3 \in R$, die entweder Primpotenzen oder Null sind, mit $M = \operatorname{Span}_R\{r_1x_1, r_2x_2, r_3x_3\}$.

Aufgabe 4. (1+2 Punkte) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{Z}$, indem Sie die zugehörige Matrix auf Smith-Normalform bringen:

(a) $$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= -2, \\ -8x_1 + 12x_2 &= 4. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 5. (2+1+1 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} T^3 & T+1 & -1 \\ T & T & T \\ T^2 & T+1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}[T])$$

und sei $M = \operatorname{im} L_A \subset \mathbb{Q}[T]^3$.

(a) Bestimmen Sie die Elementarteiler von A (d.h., von L_A).

(b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{Q}[T]$-Moduls M.

(c) Geben Sie eine Darstellung von $\mathbb{Q}[T]^3/M$ als direkte Summe von zyklischen $\mathbb{Q}[T]$-Moduln.