Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
07.07.2022

# Lineare Algebra II
## 11. Übungsblatt

Abgabe: Do. 14.07.2022, 10:15

**Einstiegsaufgabe A.** Bestimmen Sie die Elementarteiler der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2T & T^2+T \\ -3T^2 & T^3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}[T]) \qquad \begin{pmatrix} T & T+1 \\ T^2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2[T])$$

$$\begin{pmatrix} T & T+1 & T^3 \\ T^2 & 1 & T^2 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{F}_3[T]) \qquad \begin{pmatrix} T & T+i \\ T^2 & 1 \\ T^2-T & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{C}[T])$$

**Einstiegsaufgabe B.** Beweisen Sie die folgenden Folgerungen des Struktursatzes für endlich erzeugte abelsche Gruppen:

(a) Eine abelsche Gruppe ist genau dann ein endlich erzeugter Torsionsmodul über $\mathbb{Z}$, wenn sie endlich ist.

(b) Sei $A$ eine endliche abelsche Gruppe. Der *Exponent* $e(A)$ von $A$ ist das kleinste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in A$ gilt $n \cdot a = 0$. Der Exponent $e(A)$ teilt die Mächtigkeit $|A|$, und $e(A)$ und $|A|$ haben dieselben Primfaktoren.

**Aufgabe 1.** (4 Punkte) Sei $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass die Matrizen $A$ und $A^\intercal$ ähnlich sind.

*Hinweis.* Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die $K[T]$-Moduln $K^n[L_A]$ und $K^n[L_{A^\intercal}]$ isomorph sind. Verwenden Sie die Präsentationen dieser $K[T]$-Moduln aus Aufgabe 3 Blatt 9.

**Aufgabe 2.** (2+2 Punkte)

(a) Definieren Sie eine Abbildung $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Die Anzahl der Isomorphieklassen von abelschen Gruppen mit $n$ Elementen ($n \geq 1$) ist genau

$$\prod_{p \text{ Primzahl}} \gamma(v_p(n)).$$

(b) Bestimmen Sie für jedes $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass es genau $k$ paarweise nicht-isomorphe abelsche Gruppen mit $n$ Elementen gibt.

**Aufgabe 3.** (2+2 Punkte) Sei $K$ ein Körper und $A \in M_n(K)$.

(a) Sei $\lambda \in K^\times$. Zeigen Sie, dass $m_{\lambda A} = \lambda^{\deg m_A} m_A(\lambda^{-1}T)$.

(b) Sei $A$ die Blockdiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit $A_i \in M_{n_i}(K)$ und $n = \sum_{i=1}^k n_i$. Zeigen Sie, dass

$$m_A = \mathrm{kgV}(m_{A_1}, \ldots, m_{A_k}).$$

**Aufgabe 4.** (1+1+1+1 Punkte) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix $A$ über $K$:

(a) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $K = \mathbb{F}_2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$