Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
14.07.2022

Lineare Algebra II
12. Übungsblatt

Abgabe: Do. 21.07.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Bestimmen Sie (ohne Berechnung!) die charakteristischen und minimalen Polynome der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&2\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. Bestimmen Sie durch Berechnung von χ_A, m_A und/oder μ_A^{geom} die Jordanschen Normalformen der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 0&2&1\\ 2&0&2\\ 0&0&3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&1&1\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -1&-3&-2\\ 2&8&5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Sei K ein Körper und sei σ der Zyklus $(1\,2\,3) \in S_3$. Man betrachtet den Endomorphismus

$$\sigma_*\colon K^3 \to K^3, \quad e_i \mapsto e_{\sigma(i)},$$

der die Standardbasis von K^3 auf zyklische Weise permutiert. Entscheiden Sie jeweils für die folgenden Körper K, ob σ_* trigonalisierbar oder sogar diagonalisierbar ist, und berechnen Sie die verallgemeinerte Jordansche Normalform von σ_*:

(a) $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

(b) $K = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$

(c) $K = \mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, wobei $\alpha + 1 = \beta$ und $\alpha\beta = 1$.

Aufgabe 2. (4+1+2) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3&5&3&-10\\ 5&-6&-5&16\\ -1&1&1&-2\\ 3&-4&-3&10 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

(a) Finden Sie $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordanscher Normalform ist.

Hinweis. Die Berechnung von χ_A durch die Smith-Normalform von $TI_4 - A$ kann einfacher als durch den Laplaceschen Entwicklungssatz sein, und liefert auch das Minimalpolynom m_A. Prüfen Sie nach, dass $\chi_A = m_A = T^4 - 2T^3$. Zur Bestimmung einer Jordan-Basis dürfen Sie die folgenden Berechnungen annehmen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 8 & -8 & -8 & 24 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie S^{-1}.

(c) Berechnen Sie A^{1000} und $\exp(A)$.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ mit $x' = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}.$$