Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
21.07.2022

Lineare Algebra II
13. Übungsblatt

(keine Abgabe)

Aufgabe 1. Bestimmen Sie jeweils eine Jordan-Basis für die folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & 5\\ 2 & -5 & -10\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -6\\ -2 & 5 & 7\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2i & 1 & -i\\ 2 & 0 & -1\\ -i & 0 & i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 3 & -5 & -4 & 4\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Ähnlichkeitsklassen von $n \times n$-Matrizen A über K mit den gegebenen Eigenschaften:

(a) $n = 5$, $\mu_A^{\mathrm{alg}}(1) = 5$, $\deg m_A \leq 4$.

(b) $n = 6$, $\mu_A^{\mathrm{alg}}(1) = 4$, $\operatorname{rg} A \leq 4$.

(c) $n = 7$, $A^4 = 0$.

(d) $n = 8$, $\mu_A^{\mathrm{alg}}(1) = 8$, $\mu_A^{\mathrm{geom}}(1) = 3$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, seien U, V Vektorräume über K und seien $u, u' \in U$ und $v, v' \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind in dieser Situation immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein geeignetes Gegenbeispiel.

(a) Ist $u \otimes v = u' \otimes v'$, so gilt $u = u'$ und $v = v'$.

(b) Ist $u \otimes v = u \otimes v'$ und ist $u \neq 0$, so gilt $v = v'$.

(c) Es gilt $u \otimes v + u' \otimes v = (u + u') \otimes v$.

(d) Es gilt $u \otimes v + u' \otimes v' = (u + u') \otimes (v + v')$.

Aufgabe 4. Sei R ein kommutativer Ring und seien $I, J \subset R$ Ideale. Zeigen Sie, dass

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I + J).$$

Falls R ein Hauptidealring ist mit $r, s \in R$, schließen Sie daraus, dass

$$R/(r) \otimes_R R/(s) \cong R/(\mathrm{ggT}(r, s)).$$

Aufgabe 5. Sei R ein kommutativer Ring und seien M, N Moduln über R. Es gibt eine kanonische lineare Abbildung

$$\omega_{M,N} \colon M^* \otimes_R N \to \mathrm{Hom}_R(M, N), \quad \alpha \otimes y \mapsto (x \mapsto \alpha(x)y).$$

Sei nun M frei und endlich erzeugt.

(a) Zeigen Sie, dass $\omega_{M,N}$ ein Isomorphismus ist.

Hinweis. Eine Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von M induziert Isomorphismen $\varphi \colon N^n \xrightarrow{\sim} M^* \otimes_R N$ und $\psi \colon \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\sim} N^n$, so dass $\psi \circ \omega_{M,N} \circ \varphi = \mathrm{id}_{N^n}$.

(b) Wie sieht die Komposition von Endomorphismen unter dem Isomorphismus $\omega_{M,M}$ aus?

(c) Sei $e \colon M^* \otimes_R M \to R$ die Auswertungsabbildung $\alpha \otimes x \mapsto \alpha(x)$. Zeigen Sie, dass für alle Endomorphismen f von M gilt $\mathrm{tr}(f) = e(\omega_{M,M}^{-1}(f))$, wobei $\mathrm{tr}(f)$ die Spur einer Darstellungsmatrix $[f]_B^B$ ist.

(d) Schließen Sie aus (b) und (c) einen matrixfreien Beweis der zyklischen Invarianz der Spur: Für alle $f, g \in \mathrm{End}_R(M)$ gilt $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.