Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
05.05.2022

Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

Abgabe: Do. 12.05.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Berechnen Sie alle Winkel zwischen den folgenden Vektoren im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgende Formel ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ definiert:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{H}}B).$$

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n < \infty$. Sei $\mathrm{Bil}_K(V)$ der K-Vektorraum aller Bilinearformen auf V, und sei $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V)$ bzw. $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{alt}}(V)$ der Untervektorraum von $\mathrm{Bil}_K(V)$ bestehend aus allen symmetrischen bzw. alternierenden Bilinearformen.

(a) Bestimmen Sie $\dim_K \mathrm{Bil}_K(V)$, $\dim_K \mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V)$ und $\dim_K \mathrm{Bil}_K^{\mathrm{alt}}(V)$.

(b) Sei $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bil}_K^{\mathrm{sym}}(V) \cap \mathrm{Bil}_K^{\mathrm{alt}}(V) = \{0\}$. Schließen Sie daraus: Jedes $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ lässt sich eindeutig als Summe

$$b = b_{\mathrm{sym}} + b_{\mathrm{alt}}$$

schreiben, wobei b_{sym} symmetrisch ist und b_{alt} alternierend ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Dimensionsformel für Untervektorräume.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass der konjugierte Vektorraum $\bar{V}$ wohldefiniert ist, d.h., dass das Tripel $(V, +, \star)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, wobei:

$$+\colon V\times V \to V, \quad (v,w)\mapsto v+w, \qquad \star\colon \mathbb{C}\times V\to V, \quad (\lambda, v)\mapsto \bar{\lambda}\cdot v.$$

(b) Definieren Sie einen expliziten Isomorphismus zwischen den $\mathbb{C}$-Vektorräumen $V^\dagger = (\bar{V})^*$ und $\overline{(V^*)}$.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils alle Werte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so dass die gegebene Bilinearform $b\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist:

(a) $b(x, y) = \lambda x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \mu x_2y_2$.

(b) $b(x,y) = x_1y_1 + \lambda x_1y_2 + \mu x_2y_1 + x_2y_2$.

Hinweis. Eine Bilinearform b auf $\mathbb{R}^2$ ist genau dann positiv definit, wenn $b(e_1, e_1) > 0$ und $b\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

(a) Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und seien $v, w \in V$. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2 \cdot (\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Sei $p \in [1, \infty)$ und sei $\|-\|_p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die wie folgt definierte Abbildung:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}.$$

Man kann zeigen, dass $(\mathbb{R}^2, \|-\|_p)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Zeigen Sie, dass wenn $p \neq 2$ kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ mit zugehöriger Norm $\|-\|_p$ existiert.