Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
12.05.2022

Lineare Algebra II
3. Übungsblatt

Abgabe: Do. 19.05.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Sei V ein K-Vektorraum mit einer Basis $B = (v_1, v_2, v_3)$ und sei $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ eine Bilinearform mit

$$[b]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $C = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist, und berechnen Sie $[b]_{C,C}$.

Einstiegsaufgabe B. Berechnen Sie jeweils die orthogonale Projektion $p_U(e_1)$ von e_1 auf $U \subset \mathbb{R}^3$:

(a) $U = \mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $U = \mathbb{R} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $U = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Basis B, und sei b eine Bilinearform auf V.

(a) Zeigen Sie, dass das Vorzeichen (+, −, oder 0) von $\det([b]_{B,B})$ unabhängig von der Basis B ist.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei b symmetrisch. Zeigen Sie, dass $\det([b]_{B,B}) < 0$ genau dann, wenn b indefinit (d.h., weder positiv noch negativ semidefinit) ist.

Hinweis. Falls b indefinit ist gibt es Vektoren v_+ und v_- mit $b(v_+, v_+) > 0$ und $b(v_-, v_-) < 0$. Zeigen Sie, dass (v_+, v_-) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Führen Sie jeweils das Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt mit der gegebenen Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ durch, um ein Orthonormalsystem $(w_1, \ldots, w_n)$ mit $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_i\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_i\}$ zu finden:

(a) $(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{R}^3$.

(b) $(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ in $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 3. (1+2+1 Punkte) Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Untervektorraum und $H = U^{\perp}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $S_H \colon V \to V$, so dass

$$S_H(v) = \begin{cases} v, & \text{falls } v \in H, \\ -v, & \text{falls } v \in U. \end{cases}$$

Die Abbildung S_H heißt die *Spiegelung an dem Untervektorraum H.*

Hinweis. Nach der Vorlesung ist V die direkte Summe von U und H.

(b) S_H ist eine Isometrie.

(c) Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von U. Für alle $v \in V$ gilt dann

$$S_H(v) = v - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v \rangle \cdot u_i.$$

Aufgabe 4. (1+1+2 Punkte) Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass Isometrien zwischen euklidischen Vektorräumen automatisch *affin* sind, d.h., sie sind Komposition einer *linearen* Isometrie mit einer Verschiebung.

Seien V und W euklidische Vektorräume und sei $f \colon V \to W$ eine *abstandserhaltende* Abbildung, d.h.:

$$\|v - v'\| = \|f(v) - f(v')\| \quad \text{für alle } v, v' \in V.$$

Es sei auch $f(0) = 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist injektiv.

(b) Für alle $v, v' \in V$ gilt $\langle v, v' \rangle = \langle f(v), f(v') \rangle$.

Hinweis. Berechnen Sie $\|v - v'\|^2$ mit Hilfe der Bilinearität von $\langle -, - \rangle$.

(c) f ist linear.

Hinweis. Betrachten Sie $\|f(\lambda v + v') - \lambda f(v) - f(v')\|^2$.