Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
19.05.2022

Lineare Algebra II
4. Übungsblatt
Abgabe: Fr. 27.05.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Beweisen Sie den Satz des Pythagoras: Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und seien $v, w \in V$. Sind v und w orthogonal, so gilt

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Ist insbesondere (v, w) ein Orthonormalsystem, so gilt $\|v - w\| = \sqrt{2}$.

Einstiegsaufgabe B. Bestimmen Sie mit dem Kriterium von Sylvester, ob die folgenden hermiteschen Matrizen positiv bzw. negativ definit sind:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1+i \\ 0 & -1 & i \\ 1-i & -i & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie, dass alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\chi_f \in \mathbb{C}[T]$ reell sind, d.h., $\chi_f \in \mathbb{R}[T]$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Zu jedem Eigenwert $\lambda \in \sigma(f)$ sei $p_\lambda\colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf dem Eigenraum $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$. Zeigen Sie, dass es gilt:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma(f)} \lambda \cdot p_\lambda.$$

Diese kanonische Zerlegung von f heißt die *Spektraldarstellung* von f.

Aufgabe 3. (3+3 Punkte)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine unitäre Matrix $S \in \mathrm{U}(3)$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4. (3+3 Punkte)

(a) (Wurzeln von Matrizen) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix, die positiv semidefinit ist. Zeigen Sie, dass es genau eine positiv semidefinite hermitesche Matrix $B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$ existiert. Man schreibt dann $B = \sqrt{A}$.

    Hinweis. Verwenden Sie den Spektralsatz, um ein solches B zu finden. Zur Eindeutigkeit: Zeigen Sie zunächst, dass für $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\sqrt{\lambda} I_n$ die einzige solche Quadratwurzel von λI_n. Um den allgemeinen Fall zu behandeln, bemerken Sie, dass $AB = BA$ gilt, und damit dass sich L_B zu den Eigenräumen von A einschränkt.

(b) (Polarzerlegung) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass eine unitäre Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$ und eine positiv definite hermitesche Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ existieren, so dass $A = UP$. Außerdem sind U und P durch A eindeutig bestimmt.

    Hinweis. Sei $P = \sqrt{A^{\mathsf{H}} A}$ und $U = AP^{-1}$.

    Bemerkung. Wenn $n = 1$ hat die Polarzerlegung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^*$ die Form $z = ur$ mit $|u| = 1$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.