Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
02.06.2022

Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

Abgabe: Do. 09.06.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Zeigen Sie, dass die folgenden Ringe paarweise nicht isomorph sind:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}[T], \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}[T], \quad \mathbb{F}_2[T].$$

Einstiegsaufgabe B. Sei R ein kommutativer Ring. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) R ist ein Körper.

(b) R besitzt genau zwei Ideale.

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Berechnen Sie im $\mathbb{R}[T]$-Modul $\mathbb{R}^2[L_A]$ die folgenden Elemente:

$$T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (T^2 - T) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (T-2)^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. (1 Punkt) Sei K ein Körper und A eine K-Algebra mit $\dim_K A < \infty$. Zeigen Sie, dass zu jedem Element $a \in A$ ein Polynom $p \in K[T] \setminus \{0\}$ existiert, so dass $p(a) = 0$.

Hinweis. Betrachten Sie den Einsetzungshomomorphismus $K[T] \to A$, $p \mapsto p(a)$.

Aufgabe 3. (1+1 Punkte) Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal.

(a) Sei M ein R-Modul. Prüfen Sie nach, dass die Teilmenge

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ r_i \in I \text{ und } x_i \in M \right\} \subset M$$

ein Untermodul von M ist.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $I(R^d) = I^d$.

Aufgabe 4. (1+2+2 Punkte) Sei I das Ideal $(2, T)$ in $\mathbb{Z}[T]$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ein Polynom $p = \sum_{i=1}^{n} a_i T^i \in \mathbb{Z}[T]$ liegt in I genau dann, wenn sein Absolutglied $a_0 \in \mathbb{Z}$ gerade ist.

(b) I ist kein Hauptideal.

(c) I ist kein freier $\mathbb{Z}[T]$-Modul.

Hinweis. Bemerken Sie: Eine Familie mit ≥ 2 Elementen in einem beliebigen kommutativen Ring R kann nicht R-linear unabhängig sein.