Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
09.06.2022

Lineare Algebra II
7. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 17.06.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Sei R ein kommutativer Ring und seien $a, b \in R$. Begründen Sie die folgenden Inklusionen, und finden Sie Gegenbeispiele zu den umgekehrten Inklusionen (z.B. mit $R = \mathbb{Z}$):

$$(a + b) \subset (a) + (b), \qquad (a \cdot b) \subset (a) \cap (b).$$

Einstiegsaufgabe B. Bestimmen Sie alle Inklusionen zwischen folgenden Idealen:

(a) (1), (2), (3), (4), (6), $(2, 3)$, $(4, 6)$ in $\mathbb{Z}$.

(b) (1), (X), (X, Y), $(X + Y)$, (XY), $(XY + 2, X)$ in $\mathbb{R}[X, Y]$.

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Zeigen Sie: Sind die R-Moduln N und M/N endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt.

Aufgabe 2. (1+2 Punkte) Sei K ein beliebiger Körper. Beweisen Sie:

(a) Jedes Polynom $p \in K[T]$ vom Grad ≥ 1 ist durch ein irreduzibles Polynom teilbar.

(b) Es gibt unendlich viele monische irreduzible Polynome über K.

Hinweis. Verfahren Sie wie im Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen.

Aufgabe 3. (2+2+2+1 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring und sei $\sigma\colon R \to R$ eine Ringinvolution, d.h., ein Ringhomomorphismus mit $\sigma^2 = \mathrm{id}_R$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Fixring $R^\sigma = \{x \in R \mid \sigma(x) = x\}$ ist ein Unterring von R, und für alle $x \in R$ gelten $x + \sigma(x) \in R^\sigma$ und $x \cdot \sigma(x) \in R^\sigma$.

(b) Sei $N\colon R \to R^\sigma$, $N(x) = x \cdot \sigma(x)$. Die Abbildung N erhält und entdeckt Einheiten, d.h.:

$$R^\times = N^{-1}((R^\sigma)^\times).$$

Wir betrachten nun den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit der komplexen Konjugation, deren Fixring gleich $\mathbb{Z}$ ist. Die zugehörige Abbildung N ist

$$N(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass 3 ein irreduzibles Element von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist.

Hinweis. $3 \notin N(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$.

(d) Zeigen Sie mithilfe der Zerlegung $9 = (2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})$, dass 3 kein Primelement von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei K ein Körper und sei $p = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$ ein monisches Polynom vom Grad n über K.

(a) Zeigen Sie, dass $\dim_K K[T]/(p) = n$.

Die *Begleitmatrix* zu p ist die $n \times n$-Matrix

$$A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sei φ die $K[T]$-lineare Abbildung

$$\varphi\colon K[T] \to K^n[L_{A(p)}], \quad q \mapsto q \cdot e_1.$$

(b) Zeigen Sie, dass φ einen Isomorphismus $\bar{\varphi}\colon K[T]/(p) \xrightarrow{\sim} K^n[L_{A(p)}]$ induziert.

Hinweis. Wegen (a) genügt es zu zeigen: φ ist surjektiv und $\varphi(p) = 0$.