

Lineare Algebra II 8. Übungsblatt

Abgabe: Do. 23.06.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Bestimmen Sie jeweils alle \mathbb{C} -Algebrenhomomorphismen $f: \mathbb{C}[T] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ mit der gegebenen Eigenschaft:

- (a) $f(T^3) = T$
- (b) $f(T^3) = T^3$
- (c) $f(T^2) = 4T^2 - 4T + 1$
- (d) $f(4T^2 - 4T + 1) = -T^2$

Einstiegsaufgabe B. Berechnen Sie den ggT und das kgV der folgenden Paare im faktoriellen Ring R mithilfe der Primfaktorzerlegung:

- (a) $R = \mathbb{Z}$: $(23, 6)$, $(20, 50)$
- (b) $R = \mathbb{Q}[T]$: $(T, T^2 - 1)$, $(T^4 - 1, T^2 - 3T + 2)$

Aufgabe 1. (1+2 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie alle monischen irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 2 über \mathbb{F}_3 .
- (b) Bestimmen Sie alle monischen irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 3 über \mathbb{F}_2 .
Welche davon bleiben irreduzibel über $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \beta\}$?

Aufgabe 2. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms

$$T^4 - 4$$

in $\mathbb{Q}[T]$, $\mathbb{R}[T]$, $\mathbb{C}[T]$ und $\mathbb{F}_3[T]$ (une begründen Sie jeweils, warum es sich dabei um eine Primfaktorzerlegung handelt).

Aufgabe 3. (1+2+2 Punkte) Finden Sie jeweils $q, r \in R$ mit $a = qb + r$ und $\delta(r) < \delta(b)$.

- (a) $R = \mathbb{Z}$, $\delta(x) = |x|$, $a = 56$, $b = -9$.
- (b) $R = \mathbb{Q}[T]$, $\delta(x) = \deg(x)$, $a = T^5 + T^2$, $b = T^2 - T - 1$.
- (c) $R = \mathbb{Z}[i]$, $\delta(x) = |x|^2$, $a = 10 + 7i$, $b = -2 + 5i$.