Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SS 22
23.06.2022

Lineare Algebra II
9. Übungsblatt

Abgabe: Do. 30.06.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus:

(a) den ggT von 153 und 54 in $\mathbb{Z}$,

(b) den ggT von $T^4 + T^3 - T^2 - 2T - 2$ und $T^3 + 3T^2 - 2T - 6$ in $\mathbb{R}[T]$.

Einstiegsaufgabe B. Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Matrizen $A \in M_2(\mathbb{Z})$, wieviele Elemente der Quotientenmodul $\mathbb{Z}^2/\operatorname{im} L_A$ enthält:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{Z}$, so dass die folgenden Kongruenzen simultan erfüllt sind:

$$\begin{aligned} n &\equiv 2 \mod 3, \\ n &\equiv 1 \mod 4, \\ n &\equiv 4 \mod 7. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (1+1+1+1 Punkte) Finden Sie jeweils Elemente $r, s \in R$, die die gegebene Gleichung erfüllen, oder begründen Sie, dass keine solchen Elemente existieren:

(a) $R = \mathbb{Z}$, $107 \cdot r + 24 \cdot s = -15$

(b) $R = \mathbb{Z}[i]$, $(3 + i) \cdot r + 4 \cdot s = 1$

(c) $R = \mathbb{Q}[T]$, $(T^2 + 2) \cdot r + (T - 1) \cdot s = -T^3 + T + 1$

(d) $R = \mathbb{F}_2[T]$, $(T^2 + 1) \cdot r + (T + 1) \cdot s = T^2$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei K ein Körper und sei $A \in M_n(K)$. Man betrachte die Matrix von Polynomen $TI_n - A \in M_n(K[T])$. Zeigen Sie, dass die $K[T]$-linearen Abbildungen

$$K[T]^n \xrightarrow{L_{TI_n - A}} K[T]^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} K^n[L_A], \qquad e_i \mapsto e_i,$$

eine Präsentation von $K^n[L_A]$ definieren, d.h., dass $\operatorname{im} L_{TI_n - A} = \ker f$ gilt.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst $f \circ L_{TI_n - A} = 0$, so dass die Inklusion $\subset$ gilt. Dann betrachten Sie die induzierte Abbildung

$$\bar{f} \colon K[T]^n / \operatorname{im} L_{TI_n - A} \twoheadrightarrow K^n[L_A]$$

und zeigen Sie, dass $\dim_K K[T]^n / \operatorname{im} L_{TI_n - A} \leq n$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei R ein kommutativer Ring.

(a) (Funktorialität des Torsionsuntermoduls) Sei $f\colon M \to N$ eine R-lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass sich f zu einer R-linearen Abbildung $T(f)\colon T(M) \to T(N)$ einschränkt, und daher dass es eine R-lineare Abbildung $\bar{f}\colon M/T(M) \to N/T(N)$ mit $\bar{f}(x + T(M)) = f(x) + T(N)$ gibt. Zeigen Sie zudem: f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn beide $T(f)$ und $\bar{f}$ Isomorphismen sind.

(b) (Torsionsuntermodul eines Produkts) Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeigen Sie, dass es gilt

$$T\left(\prod_{i\in I} M_i\right) \subset \prod_{i\in I} T(M_i).$$

Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel (z.B. mit $R = \mathbb{Z}$), dass die umgekehrte Inklusion im Allgemeinen nicht gilt.