Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
21.04.2022

Kommutative Algebra
Präsenzübungsblatt

(keine Abgabe)

Aufgabe 1. (Radikale) Seien $I, J \subset R$ Ideale. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\sqrt{I} = \{x \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in I\}$ ist ein Ideal in R.

(b) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(c) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$, aber im Allgemeinen $\sqrt{I+J} \neq \sqrt{I} + \sqrt{J}$.

(d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, aber im Allgemeinen $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{I}\sqrt{J}$.

Aufgabe 2. (Zariski-Topologie) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Der *Verschwindungsort* einer Teilmenge $E \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ ist

$$V_K(E) = \{x \in K^n \mid \text{für alle } f \in E \text{ gilt } f(x) = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Verschwindungsorte $V_K(E)$ die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf K^n sind. Diese Topologie heißt die *Zariski-Topologie* auf K^n.

(b) Sei $A = \{(n, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie den Abschluss von A bezüglich der Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$.

Hinweis. Sei $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ ein Polynom, das auf A verschwindet. Betrachten Sie das Polynom $g(X) = X^n f(X, \frac{1}{X}) \in \mathbb{R}[X]$ für $n \gg 0$. Was sind die Nullstellen von g?

Aufgabe 3. Sei $R = \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ der Ring der Polynomfunktionen auf der 2-dimensionalen Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Sei $f \colon R^3 \to R$ die R-lineare Abbildung, die von der 1×3-Matrix $(X \;\; Y \;\; Z)$ induziert wird, und sei $P = \ker f$. Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv.

(b) Es gibt einen R-linearen Isomorphismus $P \oplus R \cong R^3$.

(c) Der R-Modul P ist nicht frei.

Hinweis. Jeder Vektor $v = (f, g, h) \in R^3$ definiert ein glattes Vektorfeld F_v auf S^2 durch:

$$F_v \colon S^2 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto (f(x), g(x), h(x)).$$

Das Vektorfeld $F_{(X,Y,Z)}$ ist normal zu S^2. Damit ist F_v ein tangentiales Vektorfeld zu S^2 für alle $v \in P$. Angenommen, es gäbe eine Basis (v, w) von P. Dann wäre $(F_v(x), F_w(x))$ eine Basis des Tangentialraums $T_x S^2$ für alle $x \in S^2$. Man weiß aber aus der Geometrie, dass der Tangentialbündel von S^2 nicht trivial ist.