Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
21.04.2023

Kommutative Algebra
1. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 28.04.2023, 10:15

Sei K ein Körper. Der *Verschwindungsort* einer Teilmenge $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ist

$$V_K(E) = \{x \in K^n \mid \text{für alle } f \in E \text{ gilt } f(x) = 0\} \subset K^n,$$

und das *Verschwindungsideal* einer Teilmenge $X \subset K^n$ ist

$$I_K(X) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid \text{für alle } x \in X \text{ gilt } f(x) = 0\} \subset K[X_1, \dots, X_n].$$

Satz (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei K algebraisch abgeschlossen. Für jede Teilmenge $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ gilt*

$$I_K(V_K(E)) = \sqrt{(E)}.$$

Aufgabe 1. (2 Punkte) Beweisen Sie den Nullstellensatz im Fall $n = 1$.

Aufgabe 2. (1+1 Punkte) Seien R und S Ringe.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Ideal im Produktring $R \times S$ die Form $I \times J$ hat, wobei $I \subset R$ und $J \subset S$ Ideale sind.

(b) Welche dieser Ideale sind prim bzw. maximal?

Bemerkung. Diese Aussagen lassen sich unmittelbar auf endliche Produkte verallgemeinern, aber nicht auf unendliche Produkte: In einem unendlichen Produkt $\prod_{i \in I} R_i$ kann es Ideale geben, die kein Produkt von Idealen sind.

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie das Nilradikal und das Jacobson-Radikal der folgenden Ringe:

(a) Ein Hauptidealring mit unendlich vielen Primelementen (z.B. $\mathbb{Z}$ oder $K[X]$ mit einem Körper K)

(b) Der Unterring $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$, wobei p eine Primzahl ist.

(c) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]/(X^2)$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Zeigen Sie: Ein Ring is genau dann reduziert, wenn er Unterring eines Produkts $\prod_{i \in I} K_i$ von Körpern ist.

Hinweis. Jeder Integritätsring R ist Unterring seines Quotientenkörpers $Q(R)$.