Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
23.06.2023

Kommutative Algebra
10. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 30.06.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2+1 Punkte) Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei

$$\varphi\colon K[X,Y]/(Y^2 - X^3 - X^2) \to K[T]$$

der Ringhomomorphismus mit $\varphi([X]) = T^2 - 1$ und $\varphi([Y]) = T^3 - T$.

(a) Zeigen Sie, dass alle Fasern von $\mathrm{Spec}(\varphi)$ genau ein Element haben, außer der Faser über (X, Y), die zwei Elemente hat.

Hinweis. Siehe Blatt 7 Aufgabe 2.

(b) Interpretieren Sie geometrisch die Berechnung aus (a) im Fall $K = \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Ein Ring heißt *Jacobson-Ring*, wenn jedes Radikalideal ein Durchschnitt von maximalen Idealen ist. Zeigen Sie, dass jede endlich erzeugte Algebra über einem Körper ein Jacobson-Ring ist.

Hinweis. Man kann sich zunächst auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers zurückführen.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Eine abelsche Gruppe Γ mit einer totalen Ordnung $\leq$ heißt *angeordnete abelsche Gruppe*, wenn für alle $a, b, c \in \Gamma$ gilt: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

Eine *Bewertung* auf einem Körper K ist eine Abbildung $v\colon K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$, wobei Γ eine angeordnete abelsche Gruppe ist, mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in K$:

B1. $v(x) = +\infty \iff x = 0$.

B2. $v(xy) = v(x) + v(y)$.

B3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

(a) Sei $v\colon K \to \Gamma \cup \{+\infty\}$ eine Bewertung auf einem Körper K. Zeigen Sie, dass $R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ ein Bewertungsring ist (siehe Blatt 6 Aufgabe 2), mit Einheitengruppe $v^{-1}(\{0\})$. Der Ring R heißt *Bewertungsring* zur Bewertung v.

(b) Sei umgekehrt R ein Bewertungsring. Konstruieren Sie eine Bewertung v auf $Q(R)$, so dass R der Bewertungsring zu v ist.

Hinweis. Sei Γ die Quotientengruppe $Q(R)^\times/R^\times$. Definieren Sie eine geeignete totale Ordnung auf Γ.

Aufgabe 4. (2+1 Punkte) Sei K ein Körper und sei $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge. Man kann den Verschwindungsort $V_R(E) \subset R^n$ für eine beliebige K-Algebra R definieren, und es gibt eine Bijektion

$$V_R(E) \cong \{K\text{-Algebrenhomomorphismen } K[X_1, \dots, X_n]/(E) \to R\}.$$

Sei $K[\varepsilon]$ die nicht-reduzierte K-Algebra mit Basis $\{1, \varepsilon\}$ und $\varepsilon^2 = 0$.

(a) Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Zeigen Sie, dass für alle $a_i, b_i \in K$ gilt

$$f(a_1 + \varepsilon b_1, \dots, a_n + \varepsilon b_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(a_1, \dots, a_n) \in K[\varepsilon].$$

(b) Erklären Sie, warum die folgende Aussage sinnvoll ist:

$$V_{K[\varepsilon]}(f) \cong \{(x, v) \mid x \in V_K(f) \text{ und } v \text{ ist ein Tangentialvektor zu } V_K(f) \text{ in } x\}.$$

Hinweis. Erinnern Sie sich an den Gradienten aus der Analysis.