Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
30.06.2023

Kommutative Algebra
11. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 07.07.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Sei R ein noetherscher Ring.

(a) Zeigen Sie, dass der Ring $R[[X]]$ noethersch ist.

Hinweis. Verwenden Sie die Funktion

$$\begin{aligned}\delta\colon R[[X]] \setminus \{0\} &\to \mathbb{N},\\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i &\mapsto \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\},\end{aligned}$$

statt des Grades im Beweis des Hilbertschen Basissatzes.

(b) Sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die Vervollständigung $R_I^\wedge$ von R bzgl. I noethersch ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei R ein artinscher Ring. Zeigen Sie, dass R ein endliches Produkt von lokalen Ringen ist.

Aufgabe 3. (1 Punkt) Sei X ein nüchterner Raum und sei $x \in X$. Sei $X_x \subset X$ der Durchschnitt aller Umgebungen von x. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ht}_X(x) = \dim(X_x)$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Sei R ein Ring der Krull-Dimension $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\dim(R[X]) \leq 2d + 1.$$

Hinweis. Betrachten Sie die Fasern von $R \hookrightarrow R[X]$.

Aufgabe 5. (2+1 Punkte) Sei K ein Körper und $v\colon K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{+\infty\}$ eine surjektive Bewertung mit zugehörigem Bewertungsring $R \subset K$ (siehe Blatt 10 Aufgage 3).

Eine Teilmenge $I \subset \Gamma$ heißt *symmetrisches Intervall*, wenn $I = -I$ und für alle $a \leq b$ in I gilt $[a, b] \subset I$. Eine *isolierte Untergruppe* von Γ ist eine echte Untergruppe, die auch ein symmetrisches Intervall ist. Die Anzahl der isolierten Untergruppen von Γ heißt die *Höhe* von Γ. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine inklusionsumkehrende Bijektion

$$\{\text{Ideale in } R\} \xrightarrow{\sim} \{\text{symmetrische Intervalle in } \Gamma\}, \quad I \mapsto \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \notin v(I)\},$$

die sich zu einer Bijektion

$$\{\text{Primideale in } R\} \xrightarrow{\sim} \{\text{isolierte Untergruppen von } \Gamma\}$$

einschränkt. Insbesondere ist die Krull-Dimension von R gleich der Höhe von Γ.

(b) Ist $\Gamma \neq 0$ eine angeordnete Untergruppe von $\mathbb{R}$, so ist $\dim(R) = 1$.