Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
07.07.2023

Kommutative Algebra
12. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 14.07.2023, 10:15

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Raum K^n mit der Zariski-Topologie. Zeigen Sie:

$$\dim(K^n) = \begin{cases} n, & \text{falls } K \text{ unendlich ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2. (1+2+2 Punkte) Sei K ein Körper, sei $A = K(X)[[Y]]$ und sei

$$R = \{f(X,Y) \in A \mid f(X,0) \in K\} \subset A.$$

(a) Zeigen Sie, dass R ein lokaler Integritätsring ist, mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m} = \{f(X,Y) \in A \mid f(X,0) = 0\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\dim(R) = 1$ ist.

Hinweis. Es gilt sogar: Ist $I \subset R$ ein Radikalideal mit $0 \neq I \neq R$, so ist $I = \mathfrak{m}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\dim(R[T]) = 3$ ist.

Hinweis. Nach Blatt 11 Aufgabe 4 gilt $\dim(R[T]) \leq 3$. Um eine Kette von Primidealen der Länge 3 zu finden, betrachten Sie den Einsetzungshomomorphismus

$$\varepsilon_X \colon R[T] \to A, \quad h \mapsto h(X).$$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Seien $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{trdeg}_K(M) = \operatorname{trdeg}_K(L) + \operatorname{trdeg}_L(M).$$

Aufgabe 4. (1+1 Punkte) Sei K ein Körper. Berechnen Sie jeweils die Krull-Dimension von R:

(a) $R = K[X,Y,Z]/(XY - Z^2)$

(b) $R = K[X,Y,Z,W]/(XY - ZW, XZ + YW)$