Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
28.04.2023

Kommutative Algebra
2. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 05.05.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) (Summe von kommutativen Algebren) Sei R ein (kommutativer) Ring und seien A, B (kommutative) R-Algebren.

(a) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ eine Struktur von R-Algebra besitzt, wobei

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

Außerdem sind die Abbildungen

$$\iota_1 \colon A \to A \otimes_R B, \quad a \mapsto a \otimes 1,$$
$$\iota_2 \colon B \to A \otimes_R B, \quad b \mapsto 1 \otimes b,$$

R-Algebrenhomomorphismen.

(b) Beweisen Sie die folgende universelle Eigenschaft der R-Algebra $A \otimes_R B$. Sei C eine (kommutative) R-Algebra und seien $f \colon A \to C$ und $g \colon B \to C$ R-Algebrenhomomorphismen. Dann gibt es *genau einen* R-Algebrenhomomorphismus $h \colon A \otimes_R B \to C$ mit $h \circ \iota_1 = f$ und $h \circ \iota_2 = g$.

Bemerkung. Diese universelle Eigenschaft bedeutet, dass das Tensorprodukt $A \otimes_R B$ eine *Summe* (oder ein *Koprodukt*) von A und B in der Kategorie der kommutativen R-Algebren ist. Dies gilt aber nicht in der größeren Kategorie der nicht-unbedingt-kommutativen R-Algebren.

Aufgabe 2. (1+1+2+2 Punkte) Prüfen Sie die folgenden Berechnungen nach:

(a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n, m)\mathbb{Z}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

(b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

(c) $R[X]/(f) \otimes_R R[Y]/(g) \cong R[X, Y]/(f, g)$ als R-Algebren für alle Ringe R und Polynome $f \in R[X]$, $g \in R[Y]$.

(d) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebren.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei M ein R-Modul und $f \colon N \to P$ eine R-lineare Abbildung. Zeigen Sie durch geeignete Gegenbeispiele, dass im Allgemeinen die kanonische Abbildung

$$M \otimes_R \ker(f) \to \ker(\mathrm{id}_M \otimes f)$$

weder injektiv noch surjektiv ist.