Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
05.05.2023

Kommutative Algebra
3. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 12.05.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2+2+2 Punkte) Sei R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Sind alle M_i projektiv, so ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$ projektiv.

(b) Sind alle M_i injektiv, so ist $\prod_{i\in I} M_i$ injektiv.

(c) Sind alle M_i flach, so ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$ flach.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht projektiv ist.

Aufgabe 3. (1+1+1+1 Punkte) Sei R ein Ring. Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass sich jeder R-Modul in einen injektiven R-Modul einbetten lässt.

Für einen R-Modul M definieren wir

$$M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Die abelsche Gruppe $M^\vee$ ist dann wieder ein R-Modul mit der Skalarmultiplikation $(r\cdot\varphi)(m) := \varphi(rm)$. Nach Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Modul) ist der kontravariante Funktor $M \mapsto M^\vee$ exakt. Wir betrachten die kanonische R-lineare Abbildung

$$\mathrm{ev}\colon M \to (M^\vee)^\vee, \quad \mathrm{ev}(m)(\varphi) = \varphi(m) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie mithilfe der Injektivität von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dass ev injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass der R-Modul $R^\vee$ injektiv ist.

Sei nun M ein beliebiger R-Modul und sei $I(M) := (R^{(M^\vee)})^\vee$.

(c) Definieren Sie eine injektive R-lineare Abbildung $M \hookrightarrow I(M)$.

(d) Zeigen Sie, dass $I(M)$ ein injektiver R-Modul ist.

Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 1(b).