Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
12.05.2023

# Kommutative Algebra
# 4. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 19.05.2023, 10:15

**Aufgabe 1.** (2 Punkte) Geben Sie einen direkten Beweis der schwachen Form von Nakayama: Ist $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul mit $J(R)M = M$, so folgt $M = 0$.

*Hinweis.* Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von $M$ mit $n \geq 1$. Wegen $J(R)M = M$ gibt es Elemente $r_1, \dots, r_n \in J(R)$ mit

$$x_1 = r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n.$$

Schließen Sie daraus, dass $\{x_2, \dots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von $M$ ist.

**Aufgabe 2.** (2 Punkte) Sei $R$ ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $j\colon R \to S^{-1}R$ der kanonische Ringhomomorphismus. Sei $\bar{S} \subset R$ die Teilmenge aller Teiler von Elementen von $S$. Zeigen Sie, dass $\bar{S} = j^{-1}((S^{-1}R)^\times)$ ist, und dass der kanonische Ringhomomorphismus $S^{-1}R \to \bar{S}^{-1}R$ ein Isomorphismus ist.

**Aufgabe 3.** (2 Punkte) Seien $A$ und $B$ Ringe und seien $S \subset A$ und $T \subset B$ multiplikativ abgeschlossene Teilmengen. Konstruieren Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$(S \times T)^{-1}(A \times B) \cong S^{-1}A \times T^{-1}B.$$

Berechnen Sie damit die Lokalisierung $(A \times B)[(1,0)^{-1}]$ sowie den Totalquotientenring $Q(A \times B)$.

**Aufgabe 4.** (2+2+2 Punkte) Sei $R$ ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von $R$-Moduln, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $S^{-1}R$-Moduln
$$\bigoplus_{i \in I} S^{-1}M_i \xrightarrow{\sim} S^{-1}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right).$$

(b) Ist $M$ ein projektiver $R$-Modul, so ist $S^{-1}M$ ein projektiver $S^{-1}R$-Modul.

(c) Ist $M$ ein flacher $R$-Modul, so ist $S^{-1}M$ ein flacher $S^{-1}R$-Modul.