Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
19.05.2023

Kommutative Algebra
5. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 26.05.2023, 10:15

Aufgabe 1. (1 Punkt) Sei R ein lokaler Ring. Zeigen Sie, dass 0 und 1 die einzigen idempotenten Elemente in R sind (x heißt *idempotent*, wenn $x^2 = x$).

Aufgabe 2. (2+1 Punkte) Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Sei $\pi\colon R_I^\wedge \twoheadrightarrow R/I$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(a) π entdeckt Einheiten: Ist $\pi(r) \in R/I$ eine Einheit, so ist $r \in R_I^\wedge$ bereits eine Einheit.

(b) $\ker \pi$ ist im Jacobson-Radikal von $R_I^\wedge$ enthalten.

Aufgabe 3. (1+2 Punkte) Zeigen Sie mit dem Henselschen Lemma:

(a) Sei K ein Körper der Charakteristic $\neq 2$. Dann hat jede Potenzreihe über K mit Absolutglied 1 eine Quadratwurzel in $K[[T]]$.

(b) Sei p eine Primzahl. Im Ring $\mathbb{Z}_p$ der p-adischen ganzen Zahlen gibt es eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel, d.h., ein Element $\zeta \in \mathbb{Z}_p$ mit $\zeta^{p-1} = 1$ und $\zeta^n \neq 1$ für alle $1 \leq n < p-1$.

Aufgabe 4. (1+2 Punkte) Sei p eine Primzahl und sei

$$d_p\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d_p(x,y) = p^{-v_p(x-y)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass d_p eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ ist.

Hinweis. Bei der Dreiecksungleichung gilt sogar $d_p(x,z) \leq \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$.

(b) Sei $\mathrm{Cauchy}_p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ der Ring der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Z}$ bzgl. d_p und sei $\mathrm{Null}_p(\mathbb{Z}) \subset \mathrm{Cauchy}_p(\mathbb{Z})$ das Ideal der Nullfolgen. Konstruieren Sie einen Ringisomorphismus

$$\mathrm{Cauchy}_p(\mathbb{Z})/\mathrm{Null}_p(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p.$$

Aufgabe 5. (1+1 Punkte) Zeigen Sie, dass die Ringeigenschaft „R ist reduziert“ lokal ist. Genauer:

(a) Ist R reduziert und ist $S \subset R$ multiplikativ abgeschlossen, so ist $S^{-1}R$ reduziert.

(b) Ist $R_\mathfrak{m}$ reduziert für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, so ist R reduziert.