Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
26.05.2023

Kommutative Algebra
6. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 02.06.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei $R \neq 0$ ein Ring und $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $R^n \twoheadrightarrow R^m$, so ist $n \geq m$.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte) Ein *Bewertungsring* ist ein Integritätsring, in dem die Teilbarkeitsrelation total ist (das heißt, für alle Elemente x, y gilt $x|y$ oder $y|x$).

(a) Zeigen Sie, dass jeder Bewertungsring lokal ist.

Hinweis. Zeigen Sie, dass die Inklusionsrelation zwischen Idealen total ist.

(b) Sei R ein faktorieller Ring und $p \in R$ ein Primelement. Zeigen Sei, dass $R_{(p)}$ ein Bewertungsring ist.

Ein Ring R heißt *noethersch*, wenn jedes Ideal $I \subset R$ endlich erzeugt ist.

(c) Sei R ein noetherscher Bewertungsring. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist, und somit dass $\operatorname{Spec}(R)$ höchstens zwei Elemente hat.

Aufgabe 3. (2+2 Punkte) Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass die R-lineare Abbildung

$$\omega_M \colon M^* \otimes_R M \to \operatorname{Hom}_R(M, M), \quad \alpha \otimes x \mapsto (y \mapsto \alpha(y)x),$$

ein Isomorphismus ist. Dabei ist $M^* = \operatorname{Hom}_R(M, R)$ der Dualmodul zu M.

Bemerkung. Man kann sogar zeigen: Ein R-Modul M ist genau dann endlich erzeugt und projektiv, wenn ω_M bijektiv ist.

Man definiert die *Spur* $\operatorname{tr}(f) \in R$ eines Endomorphismus $f \colon M \to M$ durch $\operatorname{tr}(f) = e(\omega_M^{-1}(f))$, wobei $e \colon M^* \otimes_R M \to R$, $e(\alpha \otimes x) = \alpha(x)$.

(b) Erläutern Sie, was diese Konstruktion mit der Spur einer Matrix zu tun hat.