Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
02.06.2023

Kommutative Algebra
7. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 09.06.2023, 10:15

Aufgabe 1. (1+2 Punkte) Sei R ein Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $|\mathrm{Spec}(R)| = 1$ genau dann, wenn das Nilradikal von R ein maximales Ideal ist (d.h., wenn $R/\sqrt{0}$ ein Körper ist).

(b) $\mathrm{Spec}(R)$ ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn jedes Primideal in R maximal ist.

Hinweis. Ist $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{mSpec}(R)$, so gilt $|\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})| = 1$ für alle $\mathfrak{p}$. Seien $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ Primideale in R und sei $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Folgern Sie aus (a), dass $\frac{f}{1} \in R_\mathfrak{p}$ nilpotent ist, so dass $sf^n = 0$ mit $s \notin \mathfrak{p}$ und $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die offenen Teilmengen $D(s)$ und $D(f)$.

Aufgabe 2. (1+2 Punkte) Sei R ein Ring und sei $\nu\colon A = R[X,Y]/(X^3 - Y^2) \to R[T]$ der R-Algebrenhomomorphismus mit $\nu([X]) = T^2$ und $\nu([Y]) = T^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $R[T] \cong A[T]/(T^2 - [X], T^3 - [Y])$ als A-Algebren.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Spec}(\nu)$ bijektiv ist, indem Sie ihre Fasern berechnen.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei R ein Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass die Rangfunktion

$$\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rg}_\mathfrak{p}(M) := \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})),$$

halbstetig von oben ist, d.h.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Teilmenge $\{\mathfrak{p} \mid \mathrm{rg}_\mathfrak{p}(M) \leq n\}$ offen in $\mathrm{Spec}(R)$.

Hinweis. Sei U_n diese Teilmenge und sei $\mathfrak{p} \in U_n$. Konstruieren Sie mit Nakayama eine R-lineare Abbildung $a\colon R^n \to M$, so dass $a_\mathfrak{p}$ surjektiv ist. Folgern Sie daraus, dass $a[\frac{1}{f}]$ surjektiv ist für ein geeignetes $f \in R \setminus \mathfrak{p}$, und somit dass $D(f) \subset U_n$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn folgendes gilt: Ist $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von X, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n = Y_{n+1} = Y_{n+2} = \cdots$.

(a) Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X nur endlich viele irreduzible Komponenten hat.

(b) Sei R ein noetherscher Ring (d.h., in dem jedes Ideal endlich erzeugt ist). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spec}(R)$ noethersch ist. Schließen Sie daraus, dass ein noetherscher Ring nur endlich viele minimale Primideale hat.