Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
09.06.2023

Kommutative Algebra
8. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 16.06.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei p eine Primzahl und sei R eine $\mathbb{F}_p$-algebra. Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon R \to R, \quad x \mapsto x^p,$$

bekanntlich ein Ringhomomorphismus, der *Frobenius-Endomorphismus* von R. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec}(\varphi)$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte) Sei R ein Ring, $J(R) \subset R$ sein Jacobson-Radikal. Zeigen Sie, dass $V(J(R))$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ mit folgender Eigenschaft ist: Für jede abgeschlossene Teilmenge $T \subset \operatorname{Spec}(R)$ mit $T \neq \varnothing$ gilt $T \cap V(J(R)) \neq \varnothing$.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie die Fasern von $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[\omega]$ über den Primidealen (2), (3), (5) und (7).

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein *endlicher* Ringhomomorphismus. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) φ ist endlich präsentierbar.

(b) B ist endlich präsentierbar als A-Modul.

Hinweis. Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul.

Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f_i \in A[X]$ eine Ganzheitsgleichung für b_i und sei

$$B' = A[X_1, \dots, X_n]/(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)).$$

Beobachten Sie, dass B' ein endlich erzeugter freier A-Modul ist. Zeigen Sie mithilfe der bekannten Eigenschaften von endlich präsentierbaren Algebren und Moduln, dass $\ker(B' \twoheadrightarrow B)$ ein endlich erzeugter B'-Modul ist, und daher dass B ein endlich präsentierbarer B'-Modul ist.

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Zeigen Sie, dass der Kern von $A[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow B$, $X_i \mapsto b_i$, ein endlich erzeugtes Ideal ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $n \equiv 1 \pmod 4$ und sei $\sqrt{n} \in \mathbb{C}$ eine Quadratwurzel von n. Zeigen Sie, dass $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$ ist. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ kein faktorieller Ring ist.