Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Pavel Sechin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

SoSe 23
16.06.2023

Kommutative Algebra
9. Übungsblatt

Abgabe: Fr. 23.06.2023, 10:15

Aufgabe 1. (2 Punkte) Sei R ein Bewertungsring (siehe Blatt 6 Aufgabe 2). Zeigen Sie, dass R ganz abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Beweisen Sie den *Zwei-Quadrate-Satz*: Eine ungerade Primzahl p ist genau dann eine Summe zweier Quadrate, wenn $p \equiv 1 \pmod 4$. Zeigen Sie genauer die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} p \equiv 1 \pmod 4 \quad &\Longrightarrow \quad \text{der Frobenius-Endomorphismus von } \mathbb{Z}[i]/(p) \text{ ist die Identität} \\ &\Longrightarrow \quad p \text{ ist kein Primelement in } \mathbb{Z}[i] \\ &\Longrightarrow \quad p \text{ ist eine Summe zweier Quadrate} \\ &\Longrightarrow \quad p \equiv 1 \pmod 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (2+1 Punkte) Ein Ring heißt *semilokal*, wenn er nur endlich viele maximale Ideale hat. Sei R ein Ring und sei $E \subset \operatorname{Spec}(R)$ eine endliche Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) (Primvermeidungslemma) Sei $U \subset \operatorname{Spec}(R)$ eine offene Umgebung von E. Dann gibt es ein $f \in R$ mit $E \subset D(f) \subset U$.

Hinweis. Sei $E = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$. Die offene Menge U hat die Form $D(I)$ für ein Ideal I. Die algebraische Übersetzung der Aussage ist dann, dass aus $I \not\subset \mathfrak{p}_i$ für alle i folgt $I \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Gehen Sie durch Induktion über n vor. Beim Induktionsschritt verwenden Sie die bekannte Implikation

$$I, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1} \not\subset \mathfrak{p}_n \;\Rightarrow\; I\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{n-1} \not\subset \mathfrak{p}_n.$$

(b) Sei $S = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p}$. Dann ist $S^{-1}R$ ein semilokaler Ring.

Aufgabe 4. (1+2 Punkte) Sei A ein Ring, G eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe von A, und $A^G \subset A$ der Fixpunktring.

(a) Zeigen Sie, dass die Ringerweiterung $A^G \subset A$ ganz ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Operation von G auf jeder Faser von $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(A^G)$ transitiv ist. Schließen Sie daraus, dass diese Abbildung eine Bijektion $\operatorname{Spec}(A)/G \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(A^G)$ induziert.

Hinweis. Seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ in derselben Faser, d.h., $\mathfrak{p} \cap A^G = \mathfrak{q} \cap A^G$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p} \subset \bigcup_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$, indem Sie für jedes $a \in \mathfrak{p}$ das Produkt $\prod_{\sigma \in G} \sigma(a)$ betrachten. Nach dem Primvermeidungslemma gibt es ein σ mit $\mathfrak{p} \subset \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$.