Kommutative Algebra
Sommersemester 2023
Universität Regensburg

Marc Hoyois

17. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

In diesem Skript sind

alle Ringe und Algebren kommutativ mit Eins,

sofern nicht anders angegeben. Ringhomomorphismen und Algebrenhomomorphismen müssen 1 auf 1 abbilden.

1.1 Ringe und Ideale

Ein (kommutativer) Ring R hat zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h., die Verknüpfung $+\colon R \times R \to R$ ist assoziativ und kommutativ mit einem neutralen Element $0 \in R$, und jedes $a \in R$ hat ein inverses Element $-a \in R$ bzgl. $+$.

(ii) $(R, \cdot)$ ist ein kommutatives Monoid, d.h., die Verknüpfung $\cdot\colon R \times R \to R$ ist assoziativ und kommutativ mit einem neutralen Element $1 \in R$.

(iii) Die Multiplikation ist distributiv über die Addition: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definition 1.1.1 (Einheiten, Nullteiler)**.** Sei R ein Ring.

- Ein Element $a \in R$ heißt *Einheit*, wenn es ein inverses Element a^{-1} bzgl. $\cdot$ besitzt. Die Einheiten von R bilden eine Gruppe $R^\times$ bzgl. Multiplikation, die *Einheitengruppe* von R.

- Ein Element $a \in R$ heißt *Nichtnullteiler* oder *regulär*, wenn die „Multiplikation mit a“ Abbildung
$$R \to R, \quad x \mapsto ax,$$
injektiv ist. Sonst ist a ein *Nullteiler* in R.

Bemerkung 1.1.2. Ein Element $a \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn die „Multiplikation mit a“ Abbildung bijektiv ist. Insbesondere sind alle Einheiten Nichtnullteiler.

Definition 1.1.3 (Integritätsring, Körper)**.**

- Ein Ring R heißt *Integritätsring*, wenn 0 der einzige Nullteiler in R ist (dies impliziert $1 \neq 0$, denn 1 ist kein Nullteiler).

- Ein Ring R heißt *Körper*, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$ (dies impliziert $1 \neq 0$, denn $1 \in R^\times$).

1.1.1 Ideale und Restklassenringe

Definition 1.1.4 (Ideal)**.** Sei R ein Ring. Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subset R$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) I ist eine Untergruppe von $(R, +)$, d.h.: Es gilt $0 \in I$, und für alle $a, b \in I$ gilt $a \pm b \in I$.

(ii) Für alle $r \in R$ und $a \in I$ gilt $ra \in I$.

Bemerkung 1.1.5. Ein Ideal in R ist das Gleiche wie ein Untermodul des R-Moduls R.

Beispiel 1.1.6.

(i) Der Kern $\ker f$ von einem Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ ist stets ein Ideal in R. Allgemeiner ist das Urbild $f^{-1}(I)$ eines Ideals $I \subset S$ ein Ideal in R.

(ii) Jede Teilmenge $E \subset R$ erzeugt ein Ideal (E), nämlich

$$(E) = \mathrm{Span}_R(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, r_i \in R,\, e_i \in E \right\}.$$

(iii) Das *Einsideal* von R ist $(1) = R$. Das *Nullideal* von R ist $(0) = \{0\}$; es wird einfach auch mit 0 bezeichnet.

Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann gibt es auf der Quotientengruppe R/I genau eine Struktur von Ring, damit die Quotientenabbildung

$$q\colon R \to R/I, \quad r \mapsto [r] := r + I,$$

ein Ringhomomorphismus wird. Der Ring R/I heißt der *Restklassenring* von R modulo I. Die Abbildung q hat dann die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ mit $I \subset \ker f$ gibt es genau einen Ringhomomorphimsus $\bar{f}\colon R/I \to S$ mit $f = \bar{f} \circ q$ (Proposition Alg.2.1.46).

Proposition 1.1.7 (Ideale im Restklassenring)**.** *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und $q\colon R \to R/I$ die Quotientenabbildung. Dann gibt es eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\{\textit{Ideale in } R, \textit{ die } I \textit{ enthalten}\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{Ideale in } R/I\},$$
$$J \mapsto J/I.$$

Die Umkehrabbildung bildet ein Ideal K in R/I auf $q^{-1}(K)$ ab.

Beweis. Siehe Proposition Alg.2.1.49. □

Bemerkung 1.1.8 (Summen und Schnitte von Idealen)**.** Jede Familie von Idealen $(I_a)_{a\in A}$ in einem Ring R hat ein Supremum (kleinste obere Schranke), nämlich die *Summe*

$$\sum_{a\in A} I_a = \left(\bigcup_{a\in A} I_a \right),$$

sowie ein Infimum (größte untere Schranke), nämlich den Durchschnitt

$$\bigcap_{a\in A} I_a.$$

Definition 1.1.9 (Produkt von Idealen)**.** Sei R ein Ring und seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in R. Das *Produkt* der Ideale $I_1, \dots, I_n$ ist das Ideal

$$I_1 \dots I_n = (\{a_1 \dots a_n \mid a_i \in I_i\}).$$

Die *n-te Potenz* eines Ideals I ist $I^n = \underbrace{I \dots I}_{n \text{ mal}}$.

Bemerkung 1.1.10. Seien $I_1, \dots, I_n \subset R$ Ideale.

(i) Im Allgemeinen ist die Menge der Produkte $\{a_1 \dots a_n \mid a_i \in I_i\}$ keine Untergruppe von R. Ein beliebiges Element im Produktideal $I_1 \dots I_n$ ist eine Summe von solchen Produkten. Zum Beispiel: $XY + XZ \in (X) \cdot (Y, Z)$ im Ring $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$.

(ii) Nach Definition gilt $I_1 \dots I_n \subset I_1 \cap \dots \cap I_n$. Im Allgemeinen gilt die Gleichheit aber nicht. In einem Hauptidealring gilt zum Beispiel

$$(a) \cdot (b) = (ab) \quad \text{und} \quad (a) \cap (b) = (\mathrm{kgV}(a, b)).$$

In diesem Fall gilt also $(a) \cdot (b) = (a) \cap (b)$ genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

(iii) Die Multiplikation von Idealen ist assoziativ, kommutativ und distributiv über die Addition von Idealen.

Beispiel 1.1.11. Im Polynomring $R[X, Y]$ gilt

$$(X, Y)^n = ((X) + (Y))^n = \sum_{i+j=n} (X)^i (Y)^j = (X^i Y^j \mid i + j = n).$$

Dabei folgt die mittlere Gleichheit aus dem binomischen Lehrsatz (der nach Bemerkung 1.1.10(iii) für Ideale gilt); man kann die Binomialkoeffizienten hier weglassen, denn Ideale erfüllen $I + I = I$.

Wir erinnern noch an den chinesischen Restsatz (Satz LA.8.2.49).

Definition 1.1.12 (komaximal)**.** Sei R ein Ring. Zwei Ideale $I, J \subset R$ heißen *komaximal*, wenn $I + J = R$.

Satz 1.1.13 (chinesischer Restsatz)**.** *Sei R ein Ring, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $I_1, \dots, I_n \subset R$ Ideale in R, die* paarweise komaximal *sind.*

(i) *Es gilt $I_1 \cap \dots \cap I_n = I_1 \dots I_n$.*

(ii) *Der Ringhomomorphismus*

$$\varphi \colon R \to \prod_{i=1}^{n} R/I_i, \quad \varphi(x) = (x + I_1, \dots x + I_n),$$

surjektiv mit $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^n I_i$. *Insbesondere gibt es einen induzierten Isomorphismus*

$$\bar{\varphi} \colon R/\left(\bigcap_{i=1}^n I_i\right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} R/I_i.$$

Beweis. Zu (ii) siehe Satz LA.8.2.49. Wir zeigen noch (i) durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei also $n \geq 1$ und seien $I = I_1$ und $J = I_2 \cap \dots \cap I_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $J = I_2 \dots I_n$. Es bleibt also zu zeigen, dass $I \cap J \subset IJ$. Im Beweis von (ii) wurde insbesondere gezeigt, dass I und J komaximal sind: Es gibt $x \in I$ und $y \in J$ mit $x + y = 1$. Ist nun $z \in I \cap J$, so folgern wir $z = 1z = (x + y)z = xz + yz \in IJ$. □

Proposition 1.1.14 (Komaximalität von Potenzen)**.** *Seien $I, J \subset R$ komaximale Ideale und seien $n, m \geq 1$. Dann sind I^n und J^m komaximal.*

Beweis. Es gibt $x \in I$ und $y \in J$ mit $x + y = 1$. Dann gilt

$$1 = (x + y)^n = x^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \in I^n + J,$$

damit I^n und J komaximal sind. Mit demselben Argument schließen wir wiederum, dass I^n und J^m komaximal sind. □

1.1.2 Primideale und maximale Ideale

Definition 1.1.15 (Primideal, maximales Ideal)**.** Sei R ein Ring.

- Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt *Primideal* wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und für alle $x, y \in R$ gilt: Ist $xy \in \mathfrak{p}$, so folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$.
- Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ heißt *maximales Ideal* wenn $\mathfrak{m} \neq R$ und für alle Ideale $I \subsetneq R$ gilt: Ist $\mathfrak{m} \subset I$, so folgt $\mathfrak{m} = I$.

Beispiel 1.1.16. Die Ideale in $\mathbb{Z}$ sind bekanntlich die Teilmengen $n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

(i) $n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn n eine Primzahl ist.

(ii) $n\mathbb{Z}$ ist genau dann ein Primideal, wenn n eine Primzahl oder gleich Null ist.

Proposition 1.1.17 (Restklassenringe zu Primidealen/maximalen Idealen)**.** *Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal.*

(i) *I ist genau dann prim, wenn R/I ein Integritätsring ist.*

(ii) *I ist genau dann maximal, wenn R/I ein Körper ist.*

Beweis. *Zu* (i). Es gilt $1 \in I$ genau dann, wenn $1 \neq 0$ im Restklassenring R/I gilt. Seien $x, y \in R$. Dann gilt

$$xy \in I \quad \Longleftrightarrow \quad [x][y] = 0 \text{ in } R/I$$

und

$$x \in I \text{ oder } y \in I \quad \Longleftrightarrow \quad [x] = 0 \text{ oder } [y] = 0 \text{ in } R/I.$$

Daraus folgern wir die gewünschte Äquivalenz.

Zu (ii). Dies folgt aus Proposition 1.1.7:

$$\begin{aligned} I \text{ ist maximal} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt genau zwei Ideale } J \text{ in } R \text{ mit } I \subset J \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt genau zwei Ideale in } R/I \\ &\Longleftrightarrow \quad R/I \text{ ist ein Körper.} \end{aligned}$$

□

Korollar 1.1.18 (maximale Ideale sind prim)**.** *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R. Dann ist $\mathfrak{m}$ ein Primideal.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.1.17, da jeder Körper ein Integritätsring ist. □

Korollar 1.1.19 (Prim- und maximale Ideale im Restklassenring)**.** *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und $q\colon R \to R/I$ die Quotientenabbildung. Die inklusionserhaltende Bijektion*

$$\{\textit{Ideale in } R\textit{, die } I \textit{ enthalten}\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{Ideale in } R/I\}, \quad J \mapsto J/I,$$

aus Proposition 1.1.7 schränt sich zu einer Bijektion zwischen den Teilmengen der Primideale bzw. der maximalen Ideale ein.

Beweis. Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt $(R/I)/(J/I) \cong R/J$. Die Aussage folgt damit aus Proposition 1.1.17. □

Bemerkung 1.1.20 (Urbilder von Primidealen)**.** Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S, so ist $f^{-1}(\mathfrak{p})$ wieder ein Primideal in R. Dies gilt aber nicht für maximale Ideale: Ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in S, so ist das Ideal $f^{-1}(\mathfrak{m})$ prim (nach Korollar 1.1.18) aber nicht unbedingt maximal. Sei zum Beispiel $i\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ die Inklusionsabbildung. Das Nullideal $\{0\}$ in $\mathbb{Q}$ ist maximal (da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist), aber sein Urbild $i^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ist nicht maximal in $\mathbb{Z}$. Allgemeiner ist *jedes* Primideal das Urbild von einem maximalen Ideal unter einem Ringhomomorphismus (siehe Bemerkung 1.3.14(iii)).

Proposition 1.1.21 (Existenz maximaler Ideale)**.** *Sei R ein Ring. Jedes Ideal $I \subsetneqq R$ ist in einem maximalen Ideal enthalten. Insbesondere besitzt jeder Ring $R \neq \{0\}$ mindestens ein maximales Ideal.*

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung des Zornschen Lemmas (Satz LA.1.4.22). Wir betrachten nämlich die partiell geordnete Menge $(\mathcal{X}, \subset)$, wobei

$$\mathcal{X} = \{J \subset R \mid J \text{ ist ein Ideal in } R \text{ mit } I \subset J \subsetneqq R\}.$$

Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ eine Kette, d.h., eine solche Teilmenge, dass $(\mathcal{K}, \subset)$ total geordnet ist. Falls $\mathcal{K}$ leer ist, dann ist $I \in \mathcal{X}$ eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Sonst ist die Vereinigung $J_\infty = \bigcup_{J \in \mathcal{K}} J$ wieder ein Ideal in R, denn: Sind $x, y \in J_\infty$, so gibt es $J_x, J_y \in \mathcal{K}$ mit $x \in J_x$ und $y \in J_y$. Da $\mathcal{K}$ total geordnet ist, gilt $J_x \subset J_y$ oder $J_y \subset J_x$. Es gibt also ein $J \in \mathcal{K}$ mit $x, y \in J$. Dann sind 0, $-x$, $x + y$ und rx für alle $r \in R$ wieder Elemente von J und damit von J_∞. Zudem ist $J_\infty \neq R$, da $1 \notin J$ für alle $J \in \mathcal{K}$. Also ist J_∞ wieder ein Element von $\mathcal{X}$ und damit eine obere Schranke der Kette $\mathcal{K}$. Das Zornsche Lemma sagt nun, dass $\mathcal{X}$ ein maximales Element $\mathfrak{m}$ besitzt. Nach Definition ist dann $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, das I enthält. □

In der Definition von Primideal kann man Elemente durch Ideale ersetzen:

Proposition 1.1.22. *Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und seien $I_1, \dots, I_n \subset R$ Ideale mit $I_1 \dots I_n \subset \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein i mit $I_i \subset \mathfrak{p}$.*

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist genau die Aussage $\mathfrak{p} \neq R$. Durch Induktion brauchen wir nur noch den Fall $n = 2$ zu betrachten. Ist $I_1 \not\subset \mathfrak{p}$, so gibt es ein Element $x \in \mathfrak{p} \setminus I_1$. Für jedes $y \in I_2$ gilt aber $xy \in I_1 I_2 \subset \mathfrak{p}$, und damit $y \in \mathfrak{p}$. □

1.1.3 Radikale

Definition 1.1.23 (Radikal, Radikalideal)**.** Sei $I \subset R$ ein Ideal. Das *Radikal* von I ist das Ideal

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n \in I\}.$$

Nach Definition gilt stets $I \subset \sqrt{I}$. Das Ideal I heißt *Radikalideal*, wenn $I = \sqrt{I}$.

Beispiel 1.1.24.

(i) Jedes Primideal (und damit jedes maximale Ideal) ist ein Radikalideal.

(ii) Für jedes Ideal I ist $\sqrt{I}$ ein Radikalideal.

(iii) Sei R ein faktorieller Ring und sei $r \in R$ mit Primfaktorzerlegung $r = u p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ (wobei $u \in R^\times$ und $p_1, \dots, p_n$ paarweise verschiedene Primelemente sind). Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt

$$\sqrt{(r)} = (p_1 \dots p_n).$$

(iv) Sei $I \subset R$ ein Ideal und sei $n \geq 1$. Dann ist $\sqrt{I^n} = \sqrt{I}$. Allgemeiner löscht das Radikal den Unterschied zwischen dem Durchschnitt und dem Produkt von Idealen: Sind $I_1, \dots, I_n$ Ideale in R, so gilt

$$\sqrt{I_1 \dots I_n} = \sqrt{I_1 \cap \dots \cap I_n}.$$

Denn sei $x \in R$ mit $x^m \in I_1 \cap \dots \cap I_n$. Dann gilt $x^{mn} \in I_1 \dots I_n$.

Definition 1.1.25 (nilpotentes Element, Nilradikal, reduziert)**.** Sei R ein Ring.

- Ein Element $r \in R$ heißt *nilpotent*, wenn eine Potenz von r gleich Null ist.

- Das Radikal des Nullideals $\sqrt{0} \subset R$ heißt das *Nilradikal* von R. Nach Definition besteht $\sqrt{0}$ genau aus den nilpotenten Elementen von R. Es wird auch mit $\mathrm{Nil}(R)$ bezeichnet.

- Der Ring R heißt *reduziert*, wenn $\sqrt{0} = 0$, d.h., wenn $0 \in R$ das einzige nilpotente Element ist.

Wie bei Primidealen und maximalen Idealen kann man Radikalideale durch ihren Restklassenring charakterisieren:

Proposition 1.1.26 (Restklassenringe zu Radikalidealen)**.** *Sei R ein Ring. Ein Ideal $I \subset R$ ist genau dann radikal, wenn R/I reduziert ist.*

Beweis. Sei $J \subset R$ ein Ideal mit $I \subset J$. Ist $r \in R$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt $[r]^n \in J/I$ genau dann, wenn $r^n \in J$. Daraus folgt:

$$\sqrt{J}/I = \sqrt{J/I}.$$

Insbesondere gilt $\sqrt{I} = I$ genau dann, wenn $\sqrt{I/I} = 0$, d.h., wenn R/I reduziert ist. ☐

Proposition 1.1.27. *Sei R ein Ring. Dann ist das Nilradikal von R gleich dem Durchschnitt aller Primideale in R:*

$$\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset R} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Jedes nilpotente Element muss in jedem Radikalideal liegen, und damit in jedem Primideal. Sei umgekehrt $a \in R \setminus \sqrt{0}$. Die multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S = \{1, a, a^2, \dots\}$ enthält dann nicht die Null, so dass $S^{-1}R \neq 0$ (Bemerkung 1.3.5(iii)). Nach Proposition 1.1.21 gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in $S^{-1}R$. Sei $j \colon R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung und sei $\mathfrak{p} = j^{-1}(\mathfrak{m})$. Dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Insbesondere liegt a nicht in $\mathfrak{p}$ und damit auch nicht im Durchschnitt aller Primideale. ☐

Korollar 1.1.28. *Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist $\sqrt{I}$ gleich dem Durchschnitt aller Primideale in R, die I enthalten:*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p} \subset R} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Man wendet Proposition 1.1.27 mit dem Ring R/I an. ☐

Definition 1.1.29 (Jacobson-Radikal)**.** Sei R ein Ring. Der Durchschnitt aller maximalen Ideale in R heißt das *Jacobson-Radikal* von R und wird mit $J(R)$ oder $\mathrm{rad}(R)$ bezeichnet:

$$J(R) = \mathrm{rad}(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \subset R} \mathfrak{m}.$$

Proposition 1.1.30. *Sei R ein Ring und $x \in R$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *x liegt im Jacobson-Radikal $J(R)$.*

(ii) *Es gilt $1 + (x) \subset R^\times$, d.h.: Für alle $r \in R$ ist $1 + rx$ eine Einheit in R.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $x \in J(R)$ und $r \in R$. Da jede Nichteinheit in einem maximalen Ideal liegt (nach Proposition 1.1.21), genügt es zu zeigen, dass für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ gilt $1 + rx \notin \mathfrak{m}$. Das ist klar, denn $rx \in \mathfrak{m}$ aber $1 \notin \mathfrak{m}$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x \in R \setminus J(R)$. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ mit $x \notin \mathfrak{m}$. Nach Maximalität von $\mathfrak{m}$ gilt dann $\mathfrak{m} + (x) = R$. Insbesondere gibt es $a \in \mathfrak{m}$ und $r \in R$ mit $1 = a + rx$. Dann ist $1 - rx$ keine Einheit. ☐

1.2 Moduln

Sei R ein Ring. Ein Modul über R ist ein Tripel $(M, +, \cdot)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) $\cdot\colon R \times M \to M$ ist eine $\mathbb{Z}$-bilineare Verknüpfung, d.h., sie erfüllt $(r+s)x = rx + sx$ und $r(x+y) = rx + ry$. Diese Verknüpfung heißt *Skalarmultiplikation*.

(iii) Die Skalarmultiplikation ist kompatibel mit der Multiplikation in R im folgenden Sinne: Es gilt $1x = x$ und $r(sx) = (rs)x$.

Zu elementaren Konstruktionen und Eigenschaften von Moduln siehe LA.8.1.2.

1.2.1 Exakte Sequenzen

Definition 1.2.1 (exakte Sequenz)**.** Sei R ein Ring.

- Eine Sequenz von R-Moduln und R-linearen Abbildungen (von beliebiger Länge)

$$\cdots \to M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \to \cdots$$

  heißt *exakt*, wenn für jedes i gilt $\ker(f_i) = \operatorname{im}(f_{i+1})$.

- Eine *kurze exakte Sequenz* von R-Moduln ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to M \to N \to P \to 0.$$

Bemerkung 1.2.2.

(i) Eine R-lineare Abbildung $f\colon M \to N$ ist genau dann injektiv, wenn die Sequenz

$$0 \to M \xrightarrow{f} N$$

exakt ist, und sie ist genau dann surjektiv, wenn die Sequenz

$$M \xrightarrow{f} N \to 0$$

exakt ist.

(ii) Jede R-lineare Abbildung $f\colon M \to N$ definiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0,$$

die man in zwei kurze exakte Sequenzen zerlegen kann:

$$0 \to \ker f \to M \to \operatorname{im} f \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{im} f \to N \to \operatorname{coker} f \to 0.$$

Proposition 1.2.3. *Sei*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) *Es gibt eine R-lineare Abbildung $s\colon P \to N$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_P$.*

(ii) *Es gibt eine R-lineare Abbildung $r\colon N \to M$ mit $r \circ f = \mathrm{id}_M$.*

(iii) *Es gibt R-lineare Abbildungen $s\colon P \to N$ und $r\colon N \to M$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_P$, $r \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ r + s \circ g = \mathrm{id}_N$.*

(iv) *Es gibt einen Isomorphismus $h\colon N \xrightarrow{\sim} M \oplus P$ mit $f = h^{-1} \circ \iota_1$ und $g = \pi_2 \circ h$.*

Beweis. *Zu* (iv) $\Rightarrow$ (iii). Man setzt $s = h^{-1} \circ \iota_2$ und $r = \pi_1 \circ h$.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (iv). Setze $h = (r, g)\colon N \to M \oplus P$ und $k = f + s\colon M \oplus P \to N$. Man kann dann leicht nachrechnen, dass h und k zueinander invers sind.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i,ii). Das ist klar.

Zu (i) $\Rightarrow$ (iii). Die Abbildung $\mathrm{id}_N - s \circ g\colon N \to N$ erfüllt

$$g \circ (\mathrm{id}_N - s \circ g) = g - (g \circ s \circ g) = g - g = 0,$$

und definiert damit eine R-lineare Abbildung

$$r\colon N \xrightarrow{\mathrm{id}_N - s\circ g} \ker g = \operatorname{im} f \xrightarrow{\sim} M.$$

Zudem gilt

$$f \circ r \circ f = (\mathrm{id}_N - s \circ g) \circ f = f - (s \circ g \circ f) = f - 0 = f.$$

Da f injektiv ist, folgt daraus $r \circ f = \mathrm{id}_M$. Die Gleichheit $f \circ r + s \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt nach Konstruktion.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Abbildung $\mathrm{id}_N - f \circ r\colon N \to N$ erfüllt

$$(\mathrm{id}_N - f \circ r) \circ f = f - (f \circ r \circ f) = f - f = 0,$$

und definiert damit eine R-lineare Abbildung

$$s\colon P \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker} f = N/\operatorname{im} f \xrightarrow{\mathrm{id}_N - f\circ r} N.$$

Zudem gilt

$$g \circ s \circ g = g \circ (\mathrm{id}_N - f \circ r) = g - (g \circ f \circ r) = g - 0 = g.$$

Da g surjektiv ist, folgt daraus $g \circ s = \mathrm{id}_P$. Die Gleichheit $f \circ r + s \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt nach Konstruktion. □

Bemerkung 1.2.4. Es folgt aus (iii), dass die Sequenz

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{r} N \xleftarrow{s} P \leftarrow 0$$

exakt ist.

Definition 1.2.5 (spaltende kurze exakte Sequenz)**.** Eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln heißt *spaltend*, wenn die äquivalenten Bedingungen der Proposition 1.2.3 erfüllt sind.

Korollar 1.2.6. *Seien $i\colon N \to M$ und $p\colon M \to N$ R-lineare Abbildungen mit $p \circ i = \mathrm{id}_N$. Dann ist N ein direkter Summand von M, d.h., es gibt ein R-Modul P mit $N \oplus P \cong M$.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.2.3, angwendet mit der Sequenz $\ker(p) \hookrightarrow M \overset{p}{\twoheadrightarrow} N$. □

1.2.2 Das interne Hom

Sind M und N zwei R-Moduln, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ die Menge aller R-linearen Abbildungen von M nach N. Diese Menge ist wieder ein R-Modul mit der punktweisen Addition bzw. Skalarmultiplikation (dabei ist die Kommutativität von R wichtig). Der R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ heißt das *interne Hom* von M nach N.

Proposition 1.2.7 (Exaktheit von Hom)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul.*

(i) *Sei*

$$0 \to N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(M,P) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(M,Q)$$

exakt.

(ii) *Sei*

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(Q,M) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(P,M) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(N,M)$$

exakt.

Beweis. Zu (i). Der Kern von f_* besteht aus den $h\colon M \to N$ mit $f \circ h = 0$. Da f injektiv ist, muss dann $h = 0$ sein, so dass f_* injektiv ist. Sei nun $h\colon M \to P$. Da f injektiv ist, liegt h genau dann im Bild von f_*, wenn $\operatorname{im} h \subset \operatorname{im} f$:

$$h \in \operatorname{im}(f_*) \iff \operatorname{im} h \subset \underbrace{\operatorname{im} f}_{=\ker g} \iff g \circ h = 0 \iff h \in \ker(g_*).$$

Zu (ii). Der Kern von g^* besteht aus den $h\colon Q \to M$ mit $h \circ g = 0$. Da g surjektiv ist, muss dann $h = 0$ sein, so dass g^* injektiv ist. Sei nun $h\colon P \to M$. Da g surjektiv ist, kann man es mir der Quotientenabbildung $P \twoheadrightarrow P/\ker g$ identifizieren. Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten gilt dann:

$$h \in \operatorname{im}(g^*) \iff \underbrace{\ker g}_{=\operatorname{im} f} \subset \ker h \iff h \circ f = 0 \iff h \in \ker(f^*). \qquad \square$$

Beispiel 1.2.8. Proposition 1.2.7 lässt sich nicht auf kurze exakte Sequenzen verstärken:

(i) Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $g\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist surjektiv, aber die induzierte Abbildung

$$g_*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

ist nicht surjektiv: Die Identität hat kein Urbild.

(ii) Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}$. Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$. Dann ist f injektiv, aber die induzierte Abbildung

$$f^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), \quad h \mapsto (x \mapsto h(2x)),$$

ist nicht surjektiv: Die Identität hat kein Urbild.

1.2.3 Tensorprodukte und Skalarerweiterung

Sei R ein Ring und seien $M_1, \ldots, M_n, N$ R-Moduln. Eine Abbildung $f\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to N$ heißt *R-multilinear*, wenn sie in jedem ihrer n Argumente R-linear ist. Es existiert dann ein R-Modul $M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n$, das *Tensorprodukt* der Familie $(M_1, \ldots, M_n)$, mit einer universellen R-multilinearen Abbildung

$$\tau\colon M_1 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

das heißt: Jedes f wie oben lässt sich eindeutig als $g \circ \tau$ faktorisieren, wobei g eine R-lineare Abbildung ist. Zu der Konstruktion und Eigenschaften des Tensorprodukts siehe LA.10.1. Es ist insbesondere im geeigneten Sinne assoziativ und kommutativ mit neutralem Element R, und es ist distributiv über direkte Summen. Nach Definition gilt zudem das *Exponentialgesetz*:

$$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_R(N, P)), \quad f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x \otimes y))).$$

Proposition 1.2.9 (Exaktheit des Tensorprodukts)**.** *Sei M ein R-Modul und sei*

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Dann ist die induzierte Sequenz

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} M \otimes_R P \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes g} M \otimes_R Q \to 0$$

exakt.

Beweis. Da g surjektiv ist, sind alle reinen Tensoren im Bild von $\mathrm{id} \otimes g$. Da reine Tensoren das Tensorprodukt $M \otimes_R Q$ erzeugen (Proposition LA.10.1.15), ist $\mathrm{id} \otimes g$ surjektiv. Aus $g \circ f = 0$ folgt bereits $(\mathrm{id} \otimes g) \circ (\mathrm{id} \otimes f) = \mathrm{id} \otimes (g \circ f) = 0$. Es bleibt zu zeigen: $\ker(\mathrm{id} \otimes g) \subset \operatorname{im}(\mathrm{id} \otimes f)$. Sei L ein beliebiger R-Modul. Nach dem Exponentialgesetz (Proposition LA.10.1.9(iii)) kann man die Sequenz

$$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R Q, L) \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes g)^*} \operatorname{Hom}_R(M \otimes_R P, L) \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes f)^*} \operatorname{Hom}_R(M \otimes_R N, L) \qquad (1.2.10)$$

mit der folgenden Sequenz identifizieren:

$$\operatorname{Hom}_R(Q, \operatorname{Hom}_R(M, L)) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(P, \operatorname{Hom}_R(M, L)) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(N, \operatorname{Hom}_R(M, L)).$$

Die letztere Sequenz ist aber exakt nach Proposition 1.2.7(ii). Damit ist auch (1.2.10) exakt. Wir nehmen jetzt $L = \operatorname{coker}(\mathrm{id} \otimes f)$. Die Quotientenabbildung $q\colon M \otimes_R P \twoheadrightarrow L$ liegt dann im Kern von $(\mathrm{id} \otimes f)^*$. Nach Exaktheit von (1.2.10) gibt es eine Abbildung $h\colon M \otimes_R Q \to L$, so dass $h \circ (\mathrm{id} \otimes g) = q$. Daraus folgt $\ker(\mathrm{id} \otimes g) \subset \ker q = \operatorname{im}(\mathrm{id} \otimes f)$, wie gewünscht. ☐

Beispiel 1.2.11. Proposition 1.2.9 lässt sich nicht auf kurze exakte Sequenzen verstärken. Sei zum Beispiel $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$, ist injektiv, aber die induzierte Abbildung

$$\mathrm{id} \otimes f\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ist die Nullabbildung: $(\mathrm{id} \otimes f)(x \otimes y) = x \otimes 2y = 2x \otimes y = 0 \otimes y = 0$.

Korollar 1.2.12. *Sei M ein R-Modul und $f\colon N \to P$ eine R-lineare Abbildung.*

(i) *Es gibt eine kanonische surjektive R-lineare Abbildung*

$$M \otimes_R \operatorname{im} f \twoheadrightarrow \operatorname{im}(\mathrm{id}_M \otimes f).$$

(ii) *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\operatorname{coker}(\mathrm{id}_M \otimes f) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R \operatorname{coker} f.$$

Beweis. *Zu* (i). Die Abbildung f lässt sich wie folgt zerlegen:

$$N \twoheadrightarrow \operatorname{im} f \hookrightarrow P.$$

Dementsprechend ist $\mathrm{id}_M \otimes f$ gleich der Komposition

$$M \otimes_R N \twoheadrightarrow M \otimes_R \operatorname{im} f \to M \otimes_R P,$$

wobei die erste Abbildung wieder surjektiv ist nach Proposition 1.2.9. Das Bild der zweiten Abbildung ist damit gleich $\operatorname{im}(\mathrm{id}_M \otimes f)$.

Zu (ii). Wir betrachten die exakte Sequenz

$$N \xrightarrow{f} P \to \operatorname{coker} f \to 0.$$

Nach Propositition 1.2.9 erhalten wir eine exakte Sequenz

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} M \otimes_R P \to M \otimes_R \operatorname{coker} f \to 0,$$

die den gewünschten Isomorphismus liefert. □

Bemerkung 1.2.13. Es gibt auch eine kanonische R-lineare Abbildung

$$M \otimes_R \ker f \to \ker(\mathrm{id}_M \otimes f),$$

aber die ist im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Notation 1.2.14. Sei M ein R-Modul und sei $I \subset R$ ein Ideal. Man definiert den Untermodul $IM \subset M$ wie folgt:

$$IM = \operatorname{Span}_R\{rx \mid r \in I \text{ und } x \in M\} \subset M.$$

Wie bei dem Produkt von Idealen ist ein beliebiges Element von IM eine endliche Summe von Produkten rx. Da $I \otimes_R M$ von den reinen Tensoren $r \otimes x$ erzeugt wird, ist IM das Bild der Abbildung

$$I \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} R \otimes_R M \cong M,$$

wobei $i\colon I \hookrightarrow R$ die Inklusionsabbildung ist. Die Abbildung $i \otimes \mathrm{id}_M$ ist im Allgemeinen nicht injektiv (siehe dazu Proposition 1.2.24).

Sei nun $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und sei M ein R-Modul. Man kann S durch f als R-Modul betrachten. Das Tensorprodukt $S \otimes_R M$ hat dann eine Struktur von S-Modul, die durch die Abbildung

$$S \otimes_R (S \otimes_R M) \cong (S \otimes_R S) \otimes_R M \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}_M} S \otimes_R M$$

definiert wird, wobei $m(s \otimes t) = st$ (siehe dazu LA.10.1.1). Es gilt also $t(s \otimes x) = (ts) \otimes x$ für alle $s, t \in S$ und $x \in M$. Der so definierte S-Modul $S \otimes_R M$ heißt die *Skalarerweiterung* von M längs f. Er kommt mit einer kanonischen R-linearen Abbildung

$$\eta\colon M \cong R \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} S \otimes_R M.$$

Proposition 1.2.15 (universelle Eigenschaft der Skalarerweiterung)**.** *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, M ein R-Modul und N ein S-Modul. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_R(M, N), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \eta.$$

Beweis. Sei $\psi\colon M \to N$ eine R-lineare Abbildung. Die Abbildung

$$S \times M \to N, \quad (s, m) \mapsto s\psi(m),$$

ist R-bilinear und induziert damit eine R-lineare Abbildung $\hat{\psi}\colon S \otimes_R M \to N$. Die ist sogar S-linear, denn

$$\hat{\psi}(t(s \otimes m)) = \hat{\psi}((ts) \otimes m) = ts\psi(m) = t\hat{\psi}(s \otimes m).$$

Es ist dann klar, dass die Konstruktion $\psi \mapsto \hat{\psi}$ invers zu $\varphi \mapsto \varphi \circ \eta$ ist. □

Bemerkung 1.2.16 (Adjunktionen)**.** Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Die Skalarerweiterung längs f ist ein Funktor von R-Moduln nach S-Moduln:

$$\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_S, \quad M \mapsto S \otimes_R M.$$

Es gibt auch einen Vergissfunktor

$$\mathcal{M}\mathrm{od}_S \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R, \quad N \mapsto N,$$

die als *Skalareinschränkung* längs f bezeichnet wird. Die Bijektion aus Proposition 1.2.15 stellt eine besondere asymmetrische Beziehung zwischen den beiden Funktoren dar, die als *Adjunktion* bezeichnet wird: Man sagt genauer, dass Skalarerweiterung *linksadjungiert* zu Skalareinschränkung ist, und dass Skalareinschränkung *rechtsadjungiert* zu Skalarerweiterung ist. Es gibt viele solche adjungierte Funktorpaare in der ganzen Mathematik. Zum Beispiel:

- Ist M ein R-Modul, so ist der Funktor $(-) \otimes_R M$ linksadjungiert zu $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ (Exponentialgesetz).
- Der Funktor $\mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$, $I \mapsto R^{(I)}$, ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ (universelle Eigenschaft von freien Moduln).
- Der Funktor $\mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathcal{CA}\mathrm{lg}_R$, $I \mapsto R[X_i \mid i \in I]$, ist linksadjungiert zum Vergissfunktor $\mathcal{CA}\mathrm{lg}_R \to \mathcal{S}\mathrm{et}$ (universelle Eigenschaft von Polynomalgebren).

Proposition 1.2.17 (Skalarerweiterung von Tensorprodukten)**.** *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und seien M und N R-Moduln. Die kanonischen R-linearen Abbildungen $M \to M \otimes_R S$ und $N \to N \otimes_R S$ induzieren einen S-linearen Isomorphismus*

$$(M \otimes_R N) \otimes_R S \xrightarrow{\sim} (M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S).$$

Beweis. Man vergleicht universelle Eigenschaften. Sei P ein S-Modul. Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_S((M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S), P) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, "(2)"'] & \mathrm{Hom}_S((M \otimes_R N) \otimes_R S, P) \arrow[d, "(3)"] \\
\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R S, P)) \arrow[d, "(4)"'] & \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \arrow[d, "(5)"] \\
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N \otimes_R S, P)) \arrow[r, "(6)"] & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P)).
\end{tikzcd}$$

Dabei sind (3), (4) und (6) bijektiv nach der universellen Eigenschaft der Skalarerweiterung, und (2) und (5) sind bijektiv nach dem Exponentialgesetz. Damit ist (1) bijektiv. □

Proposition 1.2.18 (Transitivität der Skalarerweiterung)**.** *Seien $f\colon R \to S$ und $g\colon S \to T$ Ringhomomorphismen und sei M ein R-Modul. Dann gibt es einen kanonischen T-linearen Isomorphismus*

$$(M \otimes_R S) \otimes_S T \xrightarrow{\sim} M \otimes_R T, \quad x \otimes s \otimes t \mapsto x \otimes g(s)t.$$

Beweis. Man vergleicht universelle Eigenschaften: Für einen T-Modul N gilt

$$\mathrm{Hom}_T((M \otimes_R S) \otimes_S T, N) \cong \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_T(M \otimes_R T, N),$$

wobei jede Bijektion ein Fall der Proposition 1.2.15 ist. □

Bemerkung 1.2.19 (Skalarerweiterung von Algebren)**.** Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und sei A eine R-Algebra. Der S-Modul $S \otimes_R A$ hat dann eine Struktur von S-Algebra mit der Multiplikation $(s \otimes a)(s' \otimes a') = ss' \otimes aa'$. Dies kann man leicht direkt nachhrechnen oder aus Proposition 1.2.17 herleiten, indem man die Struktur von Algebra mit dem Tensoprodukt formuliert (siehe dazu LA.10.1.1).

1.2.4 Projektivität, Injektivität und Flachheit

Seien R und S Ringe. Ein Funktor

$$\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_S \quad \text{oder} \quad \mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}\mathrm{od}_S$$

heißt *exakt*, wenn er kurze exakte Sequenzen von R-Moduln auf kurze exakte Sequenzen von S-Moduln abbildet. Nach Proposition 1.3.18 ist zum Beispiel der Lokalisierungsfunktor

$$\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_{S^{-1}R}, \quad M \mapsto S^{-1}M,$$

exakt. Dies gilt aber nicht für die Funktoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M,-)&\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R, \\ \mathrm{Hom}_R(-,M)&\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R, \\ M \otimes_R (-)&\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R. \end{aligned}$$

Diese drei Funktoren erhalten die Exaktheit einer kurzen exakten Sequenz im Allgemeinen nur auf einer Seite (Propositionen 1.2.7 und 1.2.9).

Definition 1.2.20 (projektiv, injektiv, flach)**.** Sei M ein R-Modul.

- M heißt *projektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ exakt ist.
- M heißt *injektiv*, wenn der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ exakt ist.
- M heißt *flach*, wenn der Funktor $M \otimes_R (-)$ exakt ist.

Beispiel 1.2.21.

(i) Freie Moduln sind stets projektiv und flach: Ist $M \cong R^{(I)}$, so kann man die Funktoren $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ und $M \otimes_R (-)$ mit den Funktoren $(-)^I$ und $(-)^{(I)}$ identifizieren, und diese Funktoren sind exakt.

(ii) Ist K ein Körper, so ist jeder K-Vektorraum gleichzeitig projektiv, injektiv und flach. Die Projektivität und die Flachheit folgen aus der Existenz einer Basis, und die Injektivität folgt aus dem Basisergänzungssatz.

(iii) Nach Beispiel 1.2.8 ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht projektiv und der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$ nicht injektiv.Insbesondere sind freie Moduln üblicherweise *nicht* injektiv. Nach Beispiel 1.2.11 ist der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht flach.

(iv) Wir zeigen später, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiv sind (Satz 1.2.32(ii)).

Proposition 1.2.22 (Charakterisierung der Projektivität)**.** *Sei P ein R-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *P ist projektiv.*

(ii) *Jede kurze exakte Sequence*

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

ist spaltend.

(iii) *Ist $p\colon M \twoheadrightarrow N$ eine surjektive R-lineare Abbildung und ist $f\colon P \to N$ eine beliebige R-lineare Abbildung, so gibt es eine R-lineare Abbildung $\hat{f}\colon P \to M$ mit $p \circ \hat{f} = f$:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, two heads, "p"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists \hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

(iv) *P ist ein direkter Summand eines freien R-Moduls, d.h.: Es gibt einen R-Modul Q und eine Menge I mit $P \oplus Q \cong R^{(I)}$.*

Beweis. *Zu* (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Aussage (iii) sagt genau, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ surjektive Abbildungen auf surjektive Abbildungen abbildet. Die Äquivalenz von (i) und (iii) folgt damit aus Proposition 1.2.7(i).

Zu (iii) $\Rightarrow$ (ii). Aussage (iii) mit $f = \mathrm{id}_P$ sagt, dass jede surjektive Abbildung $N \twoheadrightarrow P$ einen Schnitt besitzt.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $Q = P \times_N M := \{(x, y) \in P \oplus M \mid f(x) = p(y)\}$. Dann ist Q ein Untermodul von $P \oplus M$, so dass die Projektion $\pi_1 \colon Q \to P$ surjektiv ist. Nach (ii) gibt es einen Schnitt $s \colon P \to Q$ von π_1. Die Komposition $\pi_2 \circ s \colon P \to M$ erfüllt dann $p \circ \pi_2 \circ s = f$:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, two heads, "\pi_1"] & M \arrow[d, two heads, "p"] \\ P \arrow[r, "f"] \arrow[u, dashed, bend left, "s"] & N. \end{tikzcd}$$

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iv). Man wählt eine surjektive R-lineare Abbildung $p \colon R(I) \twoheadrightarrow P$. Ist $Q = \ker(p)$, so gilt $P \oplus Q \cong R^{(I)}$ nach Proposition 1.2.3.

Zu (iv) $\Rightarrow$ (ii). Die surjektive Abbildung $N \oplus Q \twoheadrightarrow P \oplus Q \cong R^{(I)}$ hat einen Schnitt s nach der universellen Eigenschaft von $R^{(I)}$. Die Komposition $\pi_1 \circ s \circ \iota_1 \colon P \to N$ ist dann ein Schnitt von $N \twoheadrightarrow P$. $\square$

Proposition 1.2.23 (Charakterisierung der Injektivität). *Sei Q ein R-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Q ist injektiv.*

(ii) *Jede kurze exakte Sequenz*
$$0 \to Q \to M \to N \to 0$$
ist spaltend.

(iii) *Ist $i \colon M \hookrightarrow N$ eine injektive R-lineare Abbildung und ist $f \colon M \to Q$ eine beliebige R-lineare Abbildung, so gibt es eine R-lineare Abbildung $\hat{f} \colon N \to Q$ mit $\hat{f} \circ i = f$:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, dashed, "\exists \hat{f}"] & \\ M \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"'] & Q. \end{tikzcd}$$

(iv) (Baersches Kriterium) *Die Aussage* (iii) *gilt, wenn $i \colon I \hookrightarrow R$ die Inklusionsabbildung eines Ideals ist.*

Beweis. Die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) sind ganz analog zu den entsprechenden Äquivalenzen in Proposition 1.2.22. Wir zeigen noch (iv) $\Rightarrow$ (iii). Ohne Einschränkung ist $i \colon M \hookrightarrow N$ die Inlusionsabbildung eines Untermoduls. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{X} = \left\{ (M', f') \;\middle|\; \begin{array}{l} M' \text{ ist ein Zwischenmodul von } M \subset N \text{ und} \\ f' \colon M' \to Q \text{ ist eine Fortsetzung von } f \end{array} \right\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$(M', f') \prec (M'', f'') \quad \Longleftrightarrow \quad M' \subset M'' \text{ and } f''|_{M'} = f'.$$

Es gilt $(M, f) \in \mathcal{X}$. Ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ eine nichtleere Kette, so ist $M_\infty = \bigcup_{(M', f') \in \mathcal{K}} M'$ ein Zwischenmodul von $M \subset N$, und die Abbildungen f' induzieren eine R-lineare Abbildung $f_\infty \colon M_\infty \to Q$, die alle f' fortsetzt. Also ist (M_∞, f_∞) eine obere Schranke von $\mathcal{K}$. Nach dem Zornschen Lemma (Satz LA.1.4.22) gibt es ein maximales Element $(M_{\max}, f_{\max}) \in \mathcal{X}$. Es bleibt zu zeigen, dass $M_{\max} = N$. Sei $x \in N$. Die Teilmenge $I = \{r \in R \mid rx \in M_{\max}\}$ ist ein Ideal in R. Nach Voraussetzung kann man die Abbildung $I \to Q$, $r \mapsto f_{\max}(rx)$, auf R fortsetzen; sei $h\colon R \to Q$ eine solche Fortsetzung. Die Abbildung

$$g\colon M_{\max} + Rx \to Q, \quad y + rx \mapsto f_{\max}(y) + h(r),$$

ist dann wohldefiniert, denn: Ist $y + rx = y' + r'x$, so gilt $(r - r')x = y' - y \in M_{\max}$ und damit $r - r' \in I$. Nach Konstruktion von h gilt dann $h(r - r') = f_{\max}((r - r')x) = f_{\max}(y' - y)$, d.h., $f_{\max}(y) + h(r) = f_{\max}(y') + h(r')$. Es ist auch klar, dass g R-linear ist. Also gilt $(M_{\max} + Rx, g) \in \mathcal{X}$ und $(M_{\max}, f_{\max}) \prec (M_{\max} + Rx, g)$. Nach Maximalität von $(M_{\max}, f_{\max})$ schließen wir $M_{\max} = M_{\max} + Rx$, d.h., $x \in M_{\max}$. □

Proposition 1.2.24 (Charakterisierung der Flachheit)**.** *Sei M ein R-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *M ist flach.*

(ii) *Ist $f\colon N \hookrightarrow P$ eine injektive R-lineare Abbildung, so ist auch $\mathrm{id}_M \otimes f\colon M \otimes_R N \to M \otimes_R P$ injektiv.*

(iii) *Ist $I \subset R$ ein endlich erzeugtes Ideal, so ist die induzierte Abbildung*

$$I \otimes_R M \to R \otimes_R M \cong M$$

injektiv (und liefert damit einen Isomorphismus $I \otimes_R M \xrightarrow{\sim} IM$).

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt aus Proposition 1.2.9, und (iii) ist ein Sonderfall von (ii). Wir zeigen noch (iii) $\Rightarrow$ (ii). Ohne Einschränkung ist dabei $f\colon N \hookrightarrow P$ die Inklusionsabbildung eines Untermoduls.

Wir zeigen zunächst durch Induktion über n, dass (ii) gilt, wenn $P = R^n$. Falls $n = 1$ muss man zeigen, dass für jedes Ideal $I \subset R$ die Abbildung $I \otimes_R M \to M$ injektiv ist. Sei $\sum_{i=1}^k a_i \otimes x_i$ im Kern dieser Abbildung. Da das Ideal $J = (a_1, \ldots, a_k)$ endlich erzeugt ist, gilt $\sum_{i=1}^k a_i \otimes x_i = 0$ in $J \otimes_R M$ nach (iii), und damit auch in $I \otimes_R M$. Sei nun $n \geq 2$, sei $N' = N \cap (R \oplus 0^{n-1})$ und sei $N'' = N/N'$. Man kann N'' mit einem Untermodul von $R^n/(R \oplus 0^{n-1}) \cong R^{n-1}$ identifizieren. Nach Proposition 1.2.9 gibt es exakte Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
& N' \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, hook] & N \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d] & N'' \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M^n \arrow[r] & M^{n-1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Der linke vertikale Pfeil und der rechte vertikale Pfeil sind injektiv nach Induktionsvoraussetzung. Es folgt aus diesem Diagramm, dass der mittlere vertikale Pfeil auch injektiv ist: Ein Element x im Kern muss auf 0 in $N'' \otimes_R M$ gehen, damit hat ein Urbild $x' \in N' \otimes_R M$. Die injektive Abbildung $N' \otimes_R M \to M^n$ bildet aber x' auf 0 ab, so dass $x' = 0$ und somit $x = 0$.

Als nächstes zeigen wir (ii) im Fall $P = R^{(I)}$. Sei $f\colon N \hookrightarrow R^{(I)}$ und sei $\sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$ im Kern von $f \otimes \mathrm{id}_M$. Indem wir N durch seinen Untermodul $\mathrm{Span}_R\{x_1, \ldots, x_n\}$ ersetzen, können wir annehmen, dass N endlich erzeugt ist. Das Bild von N ist dann in $R^{(J)}$ enthalten für eine endliche Teilmenge $J \subset I$. Die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_M$ lässt sich dann wie folgt zerlegen:

$$N \otimes_R M \to R^{(J)} \otimes_R M \to R^{(I)} \otimes_R M.$$

Die erste Abbildung ist injektiv nach dem obigen Fall, und die zweite Abbildung ist offensichtlich injektiv. Also gilt (ii) in diesem Fall.

Schließlich betrachten wir ein beliebiges P. Wir wählen eine surjektive R-lineare Abbildung $p\colon R^{(I)} \twoheadrightarrow P$ und betrachten die folgenden Diagramme:

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(N) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & N \arrow[d, hook, "f"] \\ \ker(p) \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & R^{(I)} \arrow[r, two heads, "p"] & P, \end{tikzcd} \quad \overset{\otimes M}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} & p^{-1}(N) \otimes_R M \arrow[r, two heads] \arrow[d] & N \otimes_R M \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \\ \ker(p) \otimes_R M \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] & R^{(I)} \otimes_R M \arrow[r, two heads, "p\otimes\mathrm{id}"] & P \otimes_R M. \end{tikzcd}$$

Nach dem bereits nachgewiesenen Sonderfall sind alle Abbildungen nach $R^{(I)} \otimes_R M$ injektiv. Nach Proposition 1.2.9 ist die untere Sequenz exakt. Es folgt daraus, dass $f \otimes \mathrm{id}_M$ injektiv ist, denn: Sei x im Kern und sei $y \in p^{-1}(N) \otimes_R M$ ein Urbild von x. Nach Exaktheit der unteren Sequenz liegt y in $\ker(p) \otimes_R M$. Da die Komposition $\ker(p) \to p^{-1}(N) \to N$ die Nullabbildung ist, schließen wir $x = 0$. □

Korollar 1.2.25 (projektiv ⇒ flach)**.** *Projektive Moduln sind flach.*

Beweis. Sei P projektiv. Nach Proposition 1.2.22(iv) gibt es ein R-Modul Q und eine Menge I mit $P \oplus Q \cong R^{(I)}$. Sei $f\colon M \hookrightarrow N$ eine injektive R-lineare Abbildung. Wir betrachten das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[d] & P \otimes_R N \arrow[d] \\ R^{(I)} \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] & R^{(I)} \otimes_R N. \end{tikzcd}$$

Nach Distributivität von $\otimes$ über $\oplus$ sind die vertikalen Pfeile Inklusionen direkter Summanden und insbesondere injektiv. Der untere Pfeil ist offensichtlich injektiv. Also ist der obere Pfeil auch injektiv. Nach Proposition 1.2.24(ii) ist P flach. □

Im Folgenden wollen wir projektive, injektive und flache Moduln über Hauptidealringen konkreter charakterisieren (siehe Satz 1.2.32). Dazu brauchen wir noch ein paar allgemeine Definitionen. Zum Begriff der Torsion siehe auch LA.8.3.2.

Definition 1.2.26 (torsionsfrei, dividierbar, eindeutig dividierbar)**.** Sei M ein R-Modul.

- M heißt *torsionsfrei*, wenn für jeden Nichtnullteiler $r \in R$ die Abbildung

  $$M \to M, \quad x \mapsto rx,$$

  injektiv ist.

- M heißt *dividierbar*, wenn für jeden Nichtnullteiler $r \in R$ die Abbildung

  $$M \to M, \quad x \mapsto rx,$$

  surjektiv ist.

- M heißt *eindeutig dividierbar*, wenn es gleichzeitig torsionsfrei und dividierbar ist.

Beispiel 1.2.27. Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ ist torsionsfrei aber nicht dividierbar. Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist dividierbar aber nicht torsionsfrei. Die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$ ist eindeutig dividierbar.

Bemerkung 1.2.28. Ein R-Modul M ist genau dann eindeutig dividierbar, wenn er die Skalareinschränkung eines $Q(R)$-Moduls ist (siehe Definition 1.3.10). Die $Q(R)$-Modulstruktur auf M ist dann eindeutig bestimmt. Zum Beispiel sind die eindeutig dividierbaren abelschen Gruppen genau die $\mathbb{Q}$-Vektorräume.

Lemma 1.2.29 (injektiv ⇒ dividierbar)**.** *Injektive Moduln sind dividierbar.*

Beweis. Sei M ein injektiver R-Modul, sei $x \in M$ und sei $r \in R$ ein Nichtnullteiler. Wir suchen $y \in M$ mit $ry = x$. Nach Definition ist die Abbildung $R \to R$, $a \mapsto ra$, injektiv. Sei $f\colon R \to M$ die R-lineare Abbildung mit $f(1) = x$. Da M injektiv ist, gibt es eine R-lineare Abbildung $\hat{f}\colon R \to M$ mit $\hat{f}(r) = x$. Das Element $y = \hat{f}(1)$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. □

Lemma 1.2.30 (flach ⇒ torsionsfrei)**.** *Flache Moduln sind torsionsfrei.*

Beweis. Sei M ein flacher R-Modul und sei $r \in R$ ein Nichtnullteiler. Dann ist die Abbildung $R \to R$, $a \mapsto ra$, injektiv. Tensoriert man diese Abbildung mit M, so erhalten wir die Abbildung $M \to M$, $x \mapsto rx$. Da M falch ist, ist die letztere Abbildung auch injektiv, d.h., M ist torsionsfrei. □

Proposition 1.2.31 (Untermoduln freier Moduln über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring und F ein freier R-Modul. Dann ist jeder Untermodul von F frei.*

Beweis. Sei $(e_a)_{a\in A}$ eine Basis von F und sei $M \subset F$ ein Untermodul. Für jede Teilmenge $B \subset A$ setze $F_B = \operatorname{Span}_R\{e_a \mid a \in B\}$ und $M_B = M \cap F_B$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{X} = \{(B, \varphi) \mid B \subset A \text{ und } \varphi\colon B \to M \text{ ist eine Basis von } M_B\}$$

mit der partiellen Ordnung

$$(B, \varphi) \prec (C, \psi) \quad\iff\quad B \subset C \text{ und } \psi|_B = \varphi.$$

Ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ eine Kette, so ist wie gewöhnlich die induzierte Abbildung

$$\varphi_\infty\colon B_\infty = \bigcup_{(B,\varphi)\in\mathcal{K}} B \to M$$

eine Basis von M_{B_∞}, so dass $(B_\infty, \varphi_\infty)$ eine obere Schranke von $\mathcal{K}$ ist. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element $(B, \varphi) \in \mathcal{X}$, und es bleibt zu zeigen, dass $M_B = M$. Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $a \in A \setminus B$ gilt $M_B = M_{B\cup\{a\}}$. Sei $\pi_a\colon F \to R$ die a-te Koordinatenfunktion. Dann ist $\pi_a(M_{B\cup\{a\}})$ ein Untermodul von R, d.h., ein Ideal I, und es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to M_B \to M_{B\cup\{a\}} \to I \to 0.$$

Da R ein Hauptidealring ist, gilt entweder $I = 0$ oder $I \cong R$. Insbesondere ist I projektiv, so dass die obige Sequenz spaltet. Nach Proposition 1.2.3 gibt es einen Isomorphismus $f\colon M_B \oplus I \xrightarrow{\sim} M_{B\cup\{a\}}$, so dass $f \circ \iota_1$ die Inklusionsabbildung ist. Wäre nun $I \cong R$, so könnte man φ zu einer Basis $B \cup \{a\} \to M_{B\cup\{a\}}$ fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität von (B, φ). Also ist $I = 0$ und damit $M_B = M_{B\cup\{a\}}$, wie gewünscht. □

Satz 1.2.32 (Projektivität, Injektivität und Flachheit über Hauptidealringen)**.** *Sei R ein Hauptidealring.*

(i) *Ein R-Modul ist genau dann projektiv, wenn er frei ist.*

(ii) *Ein R-Modul ist genau dann injektiv, wenn er dividierbar ist.*

(iii) *Ein R-Modul ist genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist.*

Beweis. Zu (i). Sei P ein projektiver R-Modul. Nach Proposition 1.2.22(iv) ist P ein Untermodul eines freien R-Moduls. Nach Proposition 1.2.31 ist P frei.

Zu (ii). Sei Q ein dividierbarer R-Modul. Nach Lemma 1.2.29 genügt es zu zeigen, dass Q injektiv ist. Nach dem Baerschen Kriterium (Proposition 1.2.23(iv)) genügt es zu zeigen: Ist $r \in R$, so lässt sich jede R-lineare Abbildung $f\colon (r) \to Q$ auf R fortsetzen. Das ist trivial, wenn $r = 0$. Sei sonst $x = f(r)$. Da M dividierbar ist, gibt es ein $y \in M$ mit $ry = x$. Die Abbildung $\hat{f} \colon R \to Q$ mit $\hat{f}(1) = y$ ist dann eine Fortsetzung von f.

Zu (iii). Sei M ein torsionsfreier R-Modul. Nach Lemma 1.2.30 genügt es zu zeigen, dass M flach ist. Nach Proposition 1.2.24(iii) genügt es zu zeigen, dass für jedes $r \in R$ die Abbildung $(r) \otimes_R M \to M$ injektiv ist. Falls $r = 0$ ist dies klar, sonst ist die Abbildung $R \to (r)$, $1 \mapsto r$, ein Isomorphismus. Die Komposition

$$M \xrightarrow{\sim} R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} (r) \otimes_R M \to M$$

ist dann Multiplikation mit r, die nach Definition von „torsionsfrei“ injektiv ist. $\square$

1.2.5 Endlichkeitsbedingungen

Zur folgenden Definition siehe auch LA.8.3.1.

Definition 1.2.33 (endlich erzeugt, endlich präsentierbar)**.** Sei R ein Ring und M ein R-Modul.

(i) M heißt *endlich erzeugt*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine exakte Sequenz

$$R^n \to M \to 0$$

existiert.

(ii) M heißt *endlich präsentierbar*, wenn es $n, m \in \mathbb{N}$ und eine exakte Sequenz

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

existiert.

Bemerkung 1.2.34. Sei $f \colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und M ein R-Modul. Ist M endlich erzeugt bzw. endlich präsentierbar, so ist die Skalarerweiterung $S \otimes_R M$ wieder endlich erzeugt bzw. endlich präsentierbar. Dies folgt aus Proposition 1.2.9.

Proposition 1.2.35 (das Schlangenlemma)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"] & P \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & P' &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Dann gibt es eine R-lineare Abbildung

$$\partial \colon \ker p \to \operatorname{coker} m$$

mit $\partial(x) = [z]$, wobei:

$$\begin{tikzcd}
 & \exists\, y \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, mapsto, "n"'] & x \arrow[d, mapsto, "p"] \\
\exists!\, z \arrow[r, mapsto, "f'"'] & n(y) \arrow[r, mapsto, "g'"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Außerdem ist die folgende Sequenz exakt:

$$\begin{tikzcd}
\ker m \arrow[r, "\bar{f}"] & \ker n \arrow[r, "\bar{g}"] & \ker p \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (X.center) \tikztonodes -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\partial" description] \\
\operatorname{coker} m \arrow[r, "\bar{f}'"'] & \operatorname{coker} n \arrow[r, "\bar{g}'"'] & \operatorname{coker} p.
\end{tikzcd}$$

Beweis. *∂ ist wohldefiniert.* Seien $y, y' \in N$ zwei Urbilder von $x \in \ker p$, und seien $z, z' \in M'$ die eindeutigen Urbilder von $n(y), n(y')$. Dann ist $g(y - y') = 0$. Damit gibt es ein $w \in M$ mit $f(w) = y - y'$, so dass

$$f'(z - z') = n(y - y') = n(f(w)) = f'(m(w)).$$

Da f' injektiv ist, ist $z - z' = m(w)$, und damit $[z] = [z']$ im Kokern von m. Also ist ∂ eine wohldefinierte Abbildung. Es ist dann klar, dass ∂ eine R-lineare Abbildung ist.

Exaktheit in $\ker n$. Aus $g \circ f = 0$ folgt $\bar{g} \circ \bar{f} = 0$. Sei $x \in \ker(\bar{g}) = \ker(g) \cap \ker(n)$. Es gibt $y \in M$ mit $f(y) = x$. Es gilt dann $f'(m(y)) = n(f(y)) = n(x) = 0$ und daher $m(y) = 0$, d.h., $y \in \ker m$. Also ist y ein Urbild von x unter $\bar{f}$.

Exaktheit in $\ker p$. Es gilt $\partial \circ \bar{g} = 0$, denn: Ist $y \in \ker n$, so ist y ein Urbild von $\bar{g}(y)$ mit $n(y) = 0$. Sei $x \in \ker \partial$. Sei y und z wie in der Definition von ∂, so dass $[z] = 0$. Also gibt es $w \in M$ mit $m(w) = z$. Sei $y' = y - f(w)$. Dann ist $n(y') = n(y) - f'(m(w)) = f'(z) - f'(z) = 0$, so dass $y' \in \ker n$. Zudem ist $\bar{g}(y') = g(y) - g(f(w)) = g(y) = x$.

Exaktheit in $\operatorname{coker} m$. Es gilt $\bar{f}' \circ \partial = 0$, denn: Ist $x \in \ker p$ mit $\partial(x) = [z]$, so gilt $\bar{f}'([z]) = [f'(z)] = [n(y)] = 0$. Sei $[z] \in \ker \bar{f}'$ mit $z \in M'$. Also ist $[f'(z)] = \bar{f}'([z]) = 0$, so dass $f'(z) = n(y)$ mit einem $y \in N$. Sei $x = g(y)$. Dann gilt $\partial(x) = [z]$ nach Konstruktion.

Exaktheit in $\operatorname{coker} n$. Aus $g' \circ f' = 0$ folgt $\bar{g}' \circ \bar{f}' = 0$. Sei $[x] \in \ker(\bar{g}')$ mit $x \in N'$. Dann ist $g'(x) \in \operatorname{im} p$, also $g'(x) = p(y)$ mit $y \in P$. Sei $z \in N$ mit $g(z) = y$. Dann gilt:

$$g'(n(z)) = p(g(z)) = p(y) = g'(x) \implies x - n(z) \in \ker g' = \operatorname{im} f'.$$

Sei $w \in M'$ mit $f'(w) = x - n(z)$. Dann gilt $\bar{f}'([w]) = [f'(w)] = [x - n(z)] = [x]$. □

Proposition 1.2.36. *Sei*

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln.

(i) *Sind M und P endlich erzeugt, so ist N endlich erzeugt.*

(ii) *Sind M und P endlich präsentierbar, so ist N endlich präsentierbar.*

(iii) *Ist N endlich präsentierbar und ist M endlich erzeugt, so ist P endlich präsentierbar.*

(iv) *Ist P endlich präsentierbar und ist N endlich erzeugt, so ist M endlich erzeugt.*

Beweis. *Zu* (i). Es gibt surjektive Abbildungen $R^m \twoheadrightarrow M$ und $R^n \twoheadrightarrow P$. Da g surjektiv ist, kann man die letztere durch eine Abbildung $R^n \to N$ faktorisieren. Dann ist die Abbildung $R^{n+m} \to N$ surjektiv.

Zu (iii). Sei $R^m \to R^n \to N \to 0$ eine endliche Präsentation von N und sei $R^p \twoheadrightarrow M$ eine Surjektion. Da $R^n \to N$ surjektiv ist, gibt es eine Abbildung $R^p \to R^n$ über $M \to N$. Dann ist die Sequenz $R^{m+p} \to R^n \to P \to 0$ exakt.

Zu (iv). Sei $R^m \to R^n \to P \to 0$ eine endliche Präsentation von P. Da g surjektiv ist, kann man $R^n \to P$ durch eine Abbildung $R^n \to N$ faktorisieren. Die Komposition $R^m \to R^n \to N$ landet in $\ker g = \operatorname{im} f$:

$$\begin{tikzcd}
& R^m \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^n \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nach dem Schlangenlemma gilt $\operatorname{coker}(R^m \to M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker}(R^n \to N)$, und dieser Modul ist endlich erzeugt, da N endlich erzeugt ist. Da $\operatorname{im}(R^n \to M)$ auch endlich erzeugt ist, folgt aus (i), dass M endlich erzeugt ist.

Zu (ii). Da M und P endlich erzeugt sind, erhalten wir wie in (i) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads, "a"'] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "b"'] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads, "c"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Mit dem Schlangenlemma erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \ker a \to \ker b \to \ker c \to 0$$

(da $\operatorname{coker} a = 0$). Nach (iv) sind beide $\ker a$ und $\ker c$ endlich erzeugt. Nach (i) ist $\ker b$ auch endlich erzeugt. Nach (iii) ist damit N endlich präsentierbar. □

1.2.6 Das Lemma von Nakayama

Das Lemma von Nakayama ist einer der wichtigsten Grundsätze der Kommutativen Algebra. Es gibt eigentlich mehrere ähnliche Aussagen, die als „Lemma von Nakayama“ bezeichnet werden.

Satz 1.2.37 (Lemma von Nakayama, starke Form)**.** *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $IM = M$, so gibt es ein $r \in 1 + I$ mit $rM = 0$.*

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von M. Wegen $IM = M$ gibt es eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ mit Koeffizienten im Ideal I, so dass

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \text{d.h.,} \quad x = Ax, \quad \text{wobei} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2.38}$$

Sei

$$\chi_A = \det(T I_n - A) = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n \in R[T]$$

ihr charakteristisches Polynom. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (Satz LA.9.1.11(i)) gilt dann $\chi_A(A) = 0$. Nach dem Leibniz-Formel für die Determinante liegt der Koeffizient c_k im Ideal I^k. Sei also $r = \chi_A(1) \in 1 + I$. Nach (1.2.38) gilt $x = A^k x$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $p(I_n)x = p(A)x$ für alle Polynome $p \in R[T]$. Daraus folgt

$$rx = \chi_A(I_n)x = \chi_A(A)x = 0,$$

d.h., $rx_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und somit $rM = 0$. □

Korollar 1.2.39 (Lemma von Nakayama, schwache Form)**.** *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal, das im Jacobson-Radikal $J(R)$ enthalten ist, und M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $IM = M$, so folgt $M = 0$.*

Beweis. Nach Nakayama gibt es $r \in 1 + I \subset 1 + J(R)$ mit $rM = 0$. Nach Proposition 1.1.30 ist r eine Einheit in R, so dass $M = 0$. □

Bemerkung 1.2.40. Nach Proposition 1.2.9 gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$IM = M \iff M/IM = 0 \iff M \otimes_R R/I = 0.$$

Das Korollar 1.2.39 kann man damit folgendermaße verstehen: Ob ein endlich erzeugter R-Modul null ist, lässt sich nach Skalarerweiterung zum Restklassenring $R/J(R)$ überprüfen.

In der Praxis verwendet man oft den Sonderfall von Nakayama, in dem R ein *lokaler* Ring ist, d.h., ein Ring mit genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ (diesen wichtigen Begriff untersuchen wir weiter im Abschnitt 1.3.4). Für einen solchen Ring gilt $J(R) = \mathfrak{m}$.

Korollar 1.2.41 (Lemma von Nakayama, lokale Form)**.** *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Ist $M/\mathfrak{m}M = 0$, so folgt $M = 0$.*

Beweis. Da $\mathfrak{m}$ das Jacobson-Radikal von R ist, folgt die Aussage aus Korollar 1.2.39. $\square$

Korollar 1.2.42 (Folgerungen von Nakayama)**.** *Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal mit $I \subset J(R)$ (z.B.: R ist lokal und $I = \mathfrak{m}$ ist das maximale Ideal). Sei M ein endlich erzeugter R-Modul.*

(i) *Ist $(x_i)_{i\in E}$ eine Familie in M, die M/IM erzeugt, so erzeugt sie M selbst.*

(ii) *Sei N ein R-Modul und $f\colon N \to M$ eine R-lineare Abbildung, so dass die induzierte Abbildung $\bar{f}\colon N/IN \to M/IM$ surkektiv ist. Dann ist f selbst surjektiv.*

Beweis. (i) ist der Sonderfall von (ii) mit $N = R^{(E)}$. Sei $P = \operatorname{coker} f = M/\operatorname{im} f$. Dann ist P endlich erzeugt und erfüllt $P/IP \cong \operatorname{coker} \bar{f} = 0$. Aus Nakayama folgt $P = 0$, d.h., f is surjektiv. $\square$

Hier ist eine Anwendung der starken Form von Nakayama:

Proposition 1.2.43 (surjektive Endomorphismen sind Isomorphismen)**.** *Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $f\colon M \to M$ ein surjektiver Endomorphismus. Dann ist f ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir betrachten M als Modul über dem Polynomring $R[T]$ mit $T\cdot x = f(x)$ (Proposition LA.8.1.37). Nach Surjektivität von f gilt dann $IM = M$, wobei $I = (T) \subset R[T]$. Nach Nakayama gibt es ein Polynom $p \in R[T]$ mit $(1 - Tp)M = 0$. Also gilt $x = f(p(f)(x)) = p(f)(f(x))$ für alle $x \in M$, d.h., $p(f)$ ist ein Umkehrmorphismus zu f. $\square$

Bemerkung 1.2.44. Im Gegensatz dazu sind injektive Endomorphismen eines endlich erzeugten Moduls nicht unbedingt bijektiv. Zum Beispiel: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$.

Proposition 1.2.45 (projektive Moduln über lokalen Ringen)**.** *Sei R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul. Dann ist M frei.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und sei $k = R/\mathfrak{m}$. Der k-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$ ist endlich erzeugt, d.h., endlich-dimensional. Sei $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ eine Basis von $M/\mathfrak{m}M$ und sei $x_i \in M$ ein Urbild von $\bar{x}_i$. Die Familie $(x_1, \dots, x_n)$ definiert eine R-lineare Abbildung

$$f\colon R^n \to M,$$

so dass $\bar{f}\colon k^n \to M/\mathfrak{m}M$ bijektiv ist. Nach Nakayama (Korollar 1.2.42) ist f surjektiv. Da M projektiv ist, hat f einen Schnitt $s\colon M \to R^n$. Die induzierte Abbildung $\bar{s}\colon M/\mathfrak{m}M \to k^n$ muss dann gleich $\bar{f}^{-1}$ sein, da sie ein Schnitt von $\bar{f}$ ist. Nach Nakayama ist damit auch s surjektiv. Also ist s und damit f bijektiv. $\square$

Bemerkung 1.2.46. Proposition 1.2.45 gilt auch, wenn M nicht endlich erzeugt ist, aber der Beweis ist schwieriger (Satz von Kaplansky). Man kann auch zeigen, dass jeder endlich erzeugte *flache* Modul über einem lokalen Ring frei ist.

Proposition 1.2.47 (Nullteilerfreiheit des Tensorprodukts über einem lokalen Ring)**.** *Sei R ein lokaler Ring und seien M und N endlich erzeugte R-Moduln. Ist $M \otimes_R N = 0$, so folgt $M = 0$ oder $N = 0$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und sei $k = R/\mathfrak{m}$. Nach Proposition 1.2.17 ist die kanonische k-lineare Abbildung

$$(M \otimes_R N) \otimes_R k \to M/\mathfrak{m}M \otimes_k N/\mathfrak{m}N$$

ein Isomorphismus. Da das Tensorprodukt von Vektorräumen nullteilerfrei ist, gilt $M/\mathfrak{m}M = 0$ oder $N/\mathfrak{m}N = 0$. Die Aussage folgt nun aus Korollar 1.2.41. $\square$

1.3 Lokalisierung

Definition 1.3.1 (multiplikativ abgeschlossene Teilmenge)**.** Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset R$ heißt *multiplikativ abgeschlossen* wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt $1 \in S$.

(ii) Für alle $s, t \in S$ gilt $st \in S$.

Beispiel 1.3.2. Sei R ein Ring.

(i) Die Teilmenge der Einheiten $R^\times \subset R$ ist stets multiplikativ abgeschlossen.

(ii) Jede Teilmenge $T \subset R$ hat einen *multiplikativen Abschluss* bestehend aus allen endlichen Produkten der Elemente von T (einschließlich des leeren Produkts 1).

(iii) Die Teilmenge $R \setminus \{0\} \subset R$ ist genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn R ein Integritätsring ist.

(iv) Die Teilmenge der Nichtnullteiler in R ist stets multiplikativ abgeschlossen.

(v) Sei $s \in R$ ein beliebiges Element. Dann ist die Teilmenge $\{s^i \,|\, i \in \mathbb{N}\} \subset R$ multiplikativ abgeschlossen (und zwar der multiplikative Abschluss von $\{s\}$). Zum Beispiel bilden die Monome $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $R[X]$, und auch von $R[X, Y]$.

(vi) Sei I ein Ideal in R. Die Teilmenge $R \setminus I \subset R$ ist genau dann multiplikativ abgeschlossen, wenn I ein Primideal ist. Ist zum Beispiel $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ multiplikativ abgeschlossen.

1.3.1 Lokalisierung von Ringen

Proposition 1.3.3 (Lokalisierung von Ringen)**.** *Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Sei $\sim$ die folgende Relation auf der Produktmenge $R \times S$:*

$$(a, s) \sim (a', s') \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt ein } t \in S \text{ mit } t(as' - a's) = 0.$$

Dann:

(i) *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $R \times S$. Man bezeichnet die Äquivalenzklasse von (a, s) mit dem Bruch $\frac{a}{s}$ und die Quotientenmenge $(R \times S)/\sim$ mit $S^{-1}R$:*

$$S^{-1}R := \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; (a, s) \in R \times S \right\}.$$

(ii) *Die Verknüpfungen*

$$+ \colon S^{-1}R \times S^{-1}R \to S^{-1}R, \quad \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) \mapsto \frac{at + bs}{st}, \qquad \cdot \colon S^{-1}R \times S^{-1}R \to S^{-1}R, \quad \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) \mapsto \frac{ab}{st},$$

sind wohldefiniert und das Tripel $(S^{-1}R, +, \cdot)$ ist ein Ring.

(iii) *Die Abbildung*

$$j \colon R \to S^{-1}R, \quad a \mapsto \frac{a}{1},$$

ist ein Ringhomomorphismus, so dass $j(S) \subset (S^{-1}R)^\times$. Ist genauer $s \in S$, so ist der Bruch $\frac{1}{s} \in S^{-1}R$ das inverse Element zu $j(s)$.

Beweis. Siehe Proposition Alg.2.1.57. ☐

Definition 1.3.4 (Lokalisierung)**.** Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Der Ring $S^{-1}R$ aus Proposition 1.3.3 heißt die *Lokalisierung* von R nach S. Man bezeichnet ihn auch mit $R[S^{-1}]$. Der Ringhomomorphismus $j\colon R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$, heißt der *kanonische* Ringhomomorphismus.

Bemerkung 1.3.5 (Lokalisierung und Nullteiler)**.**

(i) Wenn die Elemente von S keine Nullteiler in R sind, z.B. wenn R ein Integritätsring ist und $S \subset R \setminus \{0\}$, dann vereinfacht sich die Äquivalenzrelation aus Proposition 1.3.3: Es gilt nämlich
$$(a, s) \sim (a', s') \iff as' - a's = 0.$$
In diesem Fall gilt insbesondere $(a, 1) \sim (a', 1)$, nur wenn $a = a'$, so dass die Abbildung $j\colon R \to S^{-1}R$ injektiv ist. Im Allgemeinen würde aber diese vereinfachte Relation nicht transitiv sein, und j ist nicht unbedingt injektiv.

(ii) Für einen Bruch $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ gilt
$$\frac{a}{s} = \frac{0}{1} \iff \text{es gibt ein } t \in S \text{ mit } ta = 0.$$
Also wenn S keine Nullteiler enthält, dann ist ein Bruch $\frac{a}{s}$ genau dann null, wenn $a = 0$.

(iii) Der Ring $S^{-1}R$ ist genau dann der Nullring, wenn $0 \in S$. Denn $\frac{1}{1} = \frac{0}{1}$ bedeutet, dass es ein $t \in S$ mit $t(1 - 0) = 0$ gibt.

Beispiel 1.3.6 (Lokalisierung nach einem Element)**.** Sei R ein Ring und sei $s \in R$. Die Lokalisierung von R nach der multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $\{1, s, s^2, \dots\}$ heißt die *Lokalisierung von R nach s* und wird mit $R[s^{-1}]$ oder $R[\frac{1}{s}]$ bezeichnet. Ihre Elemente sind Brüche der Form $\frac{a}{s^i}$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Ist zum Beispiel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so kann man den Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ mit einem Unterring von $\mathbb{Q}$ identifizieren. Die Lokalisierung $R[X][X^{-1}] = R[X^{\pm 1}]$ ist der Ring der *Laurent-Polynome* über R, d.h., formale Summen $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i$ mit $a_i \in R$, wobei nur endlich viele der a_i nicht null sind.

Beispiel 1.3.7 (Lokalisierung in einem Primideal)**.** Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so dass $R \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen ist. Der Ring
$$R_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} R$$
heißt die *Lokalisierung von R im Primideal* $\mathfrak{p}$.

Ist zum Beispiel p eine Primzahl, so kann man den Ring $\mathbb{Z}_{(p)}$ mit dem Unterring von $\mathbb{Q}$ identifizieren, der aus den Brüchen $\frac{a}{b}$ mit $b \notin (p)$ besteht. Dieser Ring erfüllt
$$\mathbb{Z}_{(p)}/(p) \cong \mathbb{F}_p \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}_{(p)}[\tfrac{1}{p}] \cong \mathbb{Q}.$$

Proposition 1.3.8 (universelle Eigenschaft der Lokalisierung)**.** *Sei R ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $j\colon R \to S^{-1}R$ der kanonische Ringhomomorhismus. Zu jedem Ring R' und jedem Ringhomomorphismus $f\colon R \to R'$ mit $f(S) \subset (R')^\times$ gibt es* genau einen *Ringhomomorphismus $\hat{f}\colon S^{-1}R \to R'$ mit $\hat{f} \circ j = f$.*

Beweis. Siehe Proposition Alg.2.1.68. ☐

Proposition 1.3.9 (Primideale in Lokalisierungen)**.** *Sei R ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und $j\colon R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung. Dann gibt es eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\{\textit{Primideale in } R, \textit{ die von } S \textit{ disjunkt sind}\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{Primideale in } S^{-1}R\},$$
$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}(S^{-1}R) := \left\{\frac{x}{s} \mid x \in \mathfrak{p},\ s \in S\right\}.$$

Die Umkehrabbildung bildet $\mathfrak{q}$ auf $j^{-1}(\mathfrak{q})$ ab.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{p}(S^{-1}R)$ ein Primideal in $S^{-1}R$ ist. Seien $x, y \in \mathfrak{p}$, $s, t \in S$. Dann gilt

$$\frac{x}{s} \pm \frac{y}{t} = \frac{tx \pm sy}{st}, \quad tx \pm sy \in \mathfrak{p}, \quad st \in S,$$

so dass $\mathfrak{p}(S^{-1}R)$ eine Untergruppe von $(S^{-1}R, +)$ ist. Ferner gilt

$$\frac{a}{b}\frac{x}{s} = \frac{ax}{bs} \in \mathfrak{p}(S^{-1}R) \quad \text{für alle } a \in R,\ b \in S,$$

so dass $\mathfrak{p}(S^{-1}R)$ ein Ideal in $(S^{-1}R, +)$ ist. Seien nun $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in S^{-1}R$ mit $\frac{xy}{st} \in \mathfrak{p}(S^{-1}R)$. Es gibt also $z \in \mathfrak{p}$ und $u \in S$ mit

$$\frac{xy}{st} = \frac{z}{u}, \quad \text{d.h.,} \quad \text{es gibt } v \in S \text{ mit } v(uxy - stz) = 0.$$

Daraus folgt $uvxy \in \mathfrak{p}$. Da $uv \in S$ und $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ nach Voraussetzung, gilt $uv \notin \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgern wir $xy \in \mathfrak{p}$ und daher $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Also gilt $\frac{x}{s} \in \mathfrak{p}(S^{-1}R)$ oder $\frac{y}{t} \in \mathfrak{p}(S^{-1}R)$, so dass $\mathfrak{p}(S^{-1}R)$ ein Primideal in $S^{-1}R$ ist.

Die gegebene Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}(S^{-1}R)$ ist damit wohldefiniert. Zur Injektivität genügt es zu zeigen, dass $j^{-1}(\mathfrak{p}(S^{-1}R)) = \mathfrak{p}$, und dabei ist die Inklusion $\supset$ klar. Sei umgekehrt $x \in j^{-1}(\mathfrak{p}(S^{-1}R))$, d.h., $\frac{x}{1} = \frac{y}{s}$ mit $y \in \mathfrak{p}$ und $s \in S$. Dann gibt es ein $t \in S$ mit $t(sx - y) = 0$. Daraus folgt $stx \in \mathfrak{p}$, und daher $x \in \mathfrak{p}$ wie oben.

Als nächstes bemerken wir, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ gilt $j^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \varnothing$, sonst wäre $\mathfrak{q}$ das Einsideal in $S^{-1}R$. Die gewünschte Umkehrabbildung ist damit auch wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass $j^{-1}(\mathfrak{q})(S^{-1}R) = \mathfrak{q}$. Seien $x \in j^{-1}(\mathfrak{q})$ und $s \in S$. Dann gilt $\frac{x}{s} = \frac{1}{s}j(x) \in \mathfrak{q}$, da $\mathfrak{q}$ ein Ideal ist. Sei umgekehrt $\frac{x}{s} \in \mathfrak{q}$. Dann ist $j(x) = \frac{s}{1}\frac{x}{s} \in \mathfrak{q}$, so dass $x \in j^{-1}(\mathfrak{q})$ und damit $\frac{x}{s} \in j^{-1}(\mathfrak{q})(S^{-1}R)$. □

1.3.2 Quotientenkörper und Restklassenkörper

Definition 1.3.10 (Totalquotientenring, Quotientenkörper)**.** Sei R ein Ring. Der *Totalquotientenring* von R ist die Lokalisierung von R nach der Menge der Nichtnullteiler:

$$Q(R) = \mathrm{Quot}(R) = \{\text{Nichtnullteiler von } R\}^{-1}R.$$

Ist R ein Integritätsring, so nennt man auch $Q(R)$ den *Quotientenkörper* von R.

Nach Bemerkung 1.3.5(i) ist der kanonische Ringhomomorphismus $j\colon R \to Q(R)$ stets injektiv. Der Totalquotientenring ist genau dann ein Körper, wenn R ein Integritätsring ist: In diesem Fall hat jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in R \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses, nämlich den Bruch $\frac{b}{a}$.

Bemerkung 1.3.11. Ist R ein *faktorieller* Ring, so kann jedes Element von $Q(R)$ als Bruch $\frac{r}{s}$ dargestellt werden, wobei r und s teilerfremd sind. Denn sind $a, b \in R$ beliebig mit $b \neq 0$ und ist $d = \mathrm{ggT}(a, b)$, so gibt es $r, s \in R$ mit $a = dr$ und $b = ds$. Dann sind r und s teilerfremd und es ist $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ in $Q(R)$.

Beispiel 1.3.12.

(i) Nach Konstruktion ist $\mathbb{Q}$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$.

(ii) Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[i]$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{Q}(i)$ der rationalen komplexen Zahlen: $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$.

(iii) Sei K ein Körper. Der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X_1, \ldots, X_n]$ ist der Körper der *rationalen Funktionen* $K(X_1, \ldots, X_n)$.

Definition 1.3.13 (Restklassenkörper)**.** Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Der *Restklassenkörper* $\kappa(\mathfrak{p})$ von R in $\mathfrak{p}$ ist der Quotientenkörper des Integritätsringes $R/\mathfrak{p}$:

$$\kappa(\mathfrak{p}) = Q(R/\mathfrak{p}).$$

Bemerkung 1.3.14.

(i) Ist $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, so ist der Restklassenring $R/\mathfrak{m}$ bereits ein Körper, so dass $\kappa(\mathfrak{m}) \cong R/\mathfrak{m}$.

(ii) Sei R ein Integritätsring, so dass (0) ein Primideal ist. Der Quotientenkörper $Q(R)$ ist dann nach Definition gleich dem Restklassenkörper $\kappa(0)$.

(iii) Der Kern des kanonischen Ringhomomorphismus $R \to \kappa(\mathfrak{p})$ ist genau gleich $\mathfrak{p}$. Insbesondere ist jedes Primideal das Urbild eines maximalen Ideal unter einem Ringhomomorphismus.

Beispiel 1.3.15 (Restklassenkörper von $\mathbb{Z}$)**.** Die Primideale in $\mathbb{Z}$ sind (0) und die maximalen Ideale (p), wobei p eine Primzahl ist. Die entsprechenden Restklassenkörper sind $\mathbb{Q}$ und die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$.

Man kann stets $\kappa(\mathfrak{p})$ mit einem Restklassenring der Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ identifizieren:

Proposition 1.3.16. *Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\kappa(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$, damit folgendes Diagramm kanonischer Abbildungen kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "j"] \arrow[d, two heads, "q"'] & & R_\mathfrak{p} \arrow[d, two heads, "q"] \\ R/\mathfrak{p} \arrow[r, hook, "j"] & \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[r, "\sim"] & R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}. \end{tikzcd}$$

Beweis. Man vergleicht universelle Eigenschaften: Beide Ringhomomorphismen $j \circ q \colon R \to \kappa(\mathfrak{p})$ und $q \circ j \colon R \to R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ bilden $\mathfrak{p}$ auf 0 und $R \setminus \mathfrak{p}$ auf Einheiten ab, und sie sind universell mit den beiden Eigenschaften. □

1.3.3 Lokalisierung von Moduln

Die Konstruktion der Lokalisierung von Ringen lässt sich wie folgt auf Moduln verallgemeinern:

Proposition 1.3.17 (Lokalisierung von Moduln)**.** *Sei R ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, und M ein R-Modul. Sei $\sim$ die folgende Relation auf der Produktmenge $M \times S$:*

$$(x, s) \sim (x', s') \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{es gibt ein } t \in S \textit{ mit } t(s'x - sx') = 0.$$

Dann:

(i) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* $M \times S$. *Man bezeichnet die Äquivalenzklasse von* (x, s) *mit dem Bruch* $\frac{x}{s}$ *und die Quotientenmenge* $(M \times S)/\sim$ *mit* $S^{-1}M$*:*

$$S^{-1}M := \left\{ \frac{x}{s} \;\middle|\; (x,s) \in M \times S \right\}.$$

(ii) *Die Verknüpfungen*

$$+\colon S^{-1}M \times S^{-1}M \to S^{-1}M, \qquad \cdot\colon S^{-1}R \times S^{-1}M \to S^{-1}M,$$
$$\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{t}\right) \mapsto \frac{tx+sy}{st}, \qquad \left(\frac{a}{s}, \frac{x}{t}\right) \mapsto \frac{ax}{st},$$

sind wohldefiniert und das Tripel $(S^{-1}M, +, \cdot)$ *ist ein Modul über* $S^{-1}R$.

(iii) *Die Abbildung*

$$j\colon M \to S^{-1}M, \quad x \mapsto \frac{x}{1},$$

ist R*-linear.*

Beweis. Ganz analog zur Proposition 1.3.3. □

Die Konstruktion $M \mapsto S^{-1}M$ ist funktoriell: Ist $f\colon M \to N$ eine R-lineare Abbildung, so ist

$$S^{-1}f\colon S^{-1}M \to S^{-1}N, \quad \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s},$$

wohldefiniert und $S^{-1}R$-linear.

Proposition 1.3.18 (Exaktheit der Lokalisierung)**.** *Sei* R *ein Ring und* $S \subset R$ *eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ist*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

eine exakte Sequenz von R*-Moduln, so ist die lokalisierte Sequenz*

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}P$$

exakt.

Beweis. Sei $\frac{x}{s}$ im Kern von $S^{-1}g$. Dann gilt $\frac{g(x)}{s} = 0$, d.h., es gibt ein $t \in S$ mit $tg(x) = 0$. Da g R-linear ist, liegt tx im Kern von g. Nach Exaktheit gibt es ein $y \in M$ mit $f(y) = tx$. Dann gilt

$$(S^{-1}f)\left(\frac{y}{ts}\right) = \frac{f(y)}{ts} = \frac{tx}{ts} = \frac{x}{s}.$$ □

Korollar 1.3.19. *Sei* R *ein Ring,* $S \subset R$ *eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und* $f\colon M \to N$ *eine* R*-lineare Abbildung. Dann gibt es kanonische Isomorphismen von* $S^{-1}R$*-Moduln:*

(i) $\ker(S^{-1}f) \cong S^{-1}\ker(f)$,

(ii) $\operatorname{coker}(S^{-1}f) \cong S^{-1}\operatorname{coker}(f)$,

(iii) $\operatorname{im}(S^{-1}f) \cong S^{-1}\operatorname{im}(f)$.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 1.3.18, indem man die folgenden exakten Sequenzen betrachtet:

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to \operatorname{coker} f \to 0 \quad \text{und} \quad 0 \to \operatorname{im} f \to N \to \operatorname{coker} f.$$ □

Korollar 1.3.20 (Lokalisierung und Quotientenmoduln)**.** *Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Sei M ein R-Modul und $N \subset M$ eine Untermodul. Dann kann man $S^{-1}N$ mit einem $S^{-1}R$-Untermodul von $S^{-1}M$ identifizieren, und es gibt einen kanonischen $S^{-1}R$-linearen Isomorphismus*

$$S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N).$$

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to N \to M \to M/N \to 0$$

und Proposition 1.3.18 erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \to S^{-1}N \to S^{-1}M \to S^{-1}(M/N) \to 0. \qquad \square$$

Proposition 1.3.21 (Skalarerweiterung längs einer Lokalisierung)**.** *Sei R ein Ring, $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und M ein R-Modul. Die R-lineare Abbildung $j\colon M \to S^{-1}M$ induziert einen $S^{-1}R$-linearen Isomorphismus*

$$S^{-1}R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M.$$

Beweis. Man muss zeigen, dass die Abbildung j die universelle Eigenschaft der Skalarerweiterung längs $R \to S^{-1}R$ erfüllt. Sei also N ein $S^{-1}R$-Modul und sei $f\colon M \to N$ eine R-lineare Abbildung. Falls eine $S^{-1}R$-lineare Fortsetzung $\hat{f}\colon S^{-1}M \to N$ existiert, ist $\hat{f}$ eindeutig bestimmt, denn

$$\hat{f}\left(\frac{x}{s}\right) = \hat{f}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{x}{1}\right) = \frac{1}{s} \cdot f(x).$$

Zur Existenz von $\hat{f}$ betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{f}\colon S \times M \to N, \quad (s,x) \mapsto \frac{1}{s} \cdot f(x).$$

Falls $(s,x) \sim (s',x')$ gilt dann $\tilde{f}(s,x) = \tilde{f}(s',x')$, denn: Es gibt ein $t \in S$ mit $ts'x = tsx'$. Anwendung von f liefert

$$\frac{t}{1}\frac{s'}{1}f(x) = \frac{t}{1}\frac{s}{1}f(x') \quad \text{und damit} \quad \frac{s'}{1}f(x) = \frac{s}{1}f(x'),$$

da $\frac{t}{1}$ eine Einheit in $S^{-1}R$ ist. Nach der universellen Eigenschaft der Quotientenmenge erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\hat{f}\colon S^{-1}M \to N, \quad \frac{x}{s} \mapsto \frac{1}{s} \cdot f(x).$$

Es ist dann klar, dass $\hat{f}$ eine $S^{-1}R$-lineare Fortsetzung von f ist. $\square$

Definition 1.3.22 (flacher Ringhomomorphismus)**.** Ein Ringhomomorphismus $R \to S$ heißt *flach*, wenn der Funktor der Skalarerweiterung $S \otimes_R (-)\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_S$ exakt ist, d.h., wenn S als R-Modul flach ist.

Korollar 1.3.23 (Flachheit der Lokalisierung)**.** *Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist der kanonische Ringhomomorphismus $j\colon R \to S^{-1}R$ flach.*

Beweis. Dies folgt aus Propositionen 1.3.21 und 1.3.18. $\square$

1.3.4 Lokale Ringe

Definition 1.3.24 (lokaler Ring, Restklassenkörper)**.** Ein Ring R heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal enthält. Ist $\mathfrak{m} \subset R$ das maximale Ideal, so heißt der Körper $R/\mathfrak{m}$ der *Restklassenkörper* von R.

Beispiel 1.3.25.

(i) Jeder Körper ist ein lokaler Ring, mit maximalem Ideal 0.

(ii) Ist R lokal und ist $I \subset R$ ein Ideal mit $I \neq R$, so ist R/I lokal (Korollar 1.1.19).

(iii) $\mathbb{Z}$ ist kein lokaler Ring, da jede Primzahl p ein maximales Ideal (p) erzeugt.

(iv) Ist p eine Primzahl und ist $n \geq 1$, so ist $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (dies folgt aus Proposition 1.1.7). Sein Restklassenkörper ist

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/(p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$$

(nach dem zweiten Isomorphiesatz Alg.2.1.52).

(v) Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[X]$ ist kein lokaler Ring, da er bekanntlich unendlich viele maximale Ideale enthält. Der Ring $K[[X]]$ der formalen Potenzreihen über K ist aber ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (X) (siehe Beispiel LA.8.2.20).

Proposition 1.3.26 (Charakterisierung von lokalen Ringen)**.** *Sei R ein Ring.*

(i) *R ist genau dann lokal, wenn $R \setminus R^\times$ ein Ideal ist, d.h., wenn $1 \neq 0$ und wenn die Summe zweier Nichteinheiten wieder eine Nichteinheit ist.*

(ii) *Sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, so dass $1 + \mathfrak{m} \subset R^\times$. Dann ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.*

Beweis. Zu (i). Jedes Ideal, das eine Einheit enthält, ist das Einsideal. Falls $R \setminus R^\times$ ein Ideal ist, ist es dann offensichtlich das eindeutige maximale Ideal in R. Sei umgekehrt R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Es gilt dann $1 \neq 0$ (der Nullring enthält keine maximale Ideale) und $\mathfrak{m} \subset R \setminus R^\times$ (denn $\mathfrak{m} \neq R$ nach Definition). Sei $x \in R \setminus R^\times$. Dann gilt $(x) \neq R$. Aus Proposition 1.1.21 folgt nun $(x) \subset \mathfrak{m}$, und daher $R \setminus R^\times \subset \mathfrak{m}$.

Zu (ii). Nach (i) genügt es zu zeigen, dass $R \setminus \mathfrak{m} \subset R^\times$. Sei $x \in R \setminus \mathfrak{m}$. Nach Maximalität von $\mathfrak{m}$ gilt $\mathfrak{m} + (x) = R$. Es gibt also $a \in \mathfrak{m}$ und $b \in R$ mit $a + bx = 1$. Nach Voraussetzung ist dann $bx = 1 - a \in 1 + \mathfrak{m}$ eine Einheit, und damit ist auch x eine Einheit. □

Beispiel 1.3.27 (Funktionskeime)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei $x \in X$ und sei C_x der Ring der Funktionskeime stetiger Funktionen um x:

$$C_x = \varinjlim_{U \ni x} C(U, \mathbb{R}) := \left(\coprod_{U \ni x} C(U, \mathbb{R}) \right) /\sim,$$

wobei U über alle offenen Umgebungen von x läuft und

$$(U, f) \sim (V, g) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine Umgebung } W \subset U \cap V \text{ von } x \text{ mit } f|_W = g|_W.$$

Sei $\mathfrak{m}_x = \{[U, f] \in C_x \mid f(x) = 0\}$ die Teilmenge der Funktionskeime von Funktionen, die im Punkt x verschwinden. Dann ist $\mathfrak{m}_x$ ein maximales Ideal in C_x, denn: Es gibt einen wohldefinierten surjektiven Ringhomomorphismus

$$\mathrm{ev}_x \colon C_x \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ev}_x([U, f]) = f(x),$$

und es gilt $\mathfrak{m}_x = \ker(\mathrm{ev}_x)$ nach Definition. Damit ist $C_x/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$ ein Körper. Zudem gilt $1 + \mathfrak{m}_x \subset C_x^\times$, denn eine stetige Funktion mit $f(x) = 1$ hat keine Nullstellen in einer Umgebung von x. Nach Proposition 1.3.26(ii) ist C_x ein lokaler Ring.

Auf ähnliche Weise ist der Ring der Funktionskeime von C^k-Funktionen um einen Punkt auf einer Mannigfaltigkeit vom Typ C^k ein lokaler Ring, für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Dieses Beispiel erklärt, warum man von „lokalen“ Ringen spricht.

Die Lokalisierung in einem Primideal ist stets ein lokaler Ring:

Proposition 1.3.28. *Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann ist der Ring $R_\mathfrak{p} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ lokal mit maximalem Ideal*

$$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{x}{s} \;\middle|\; x \in \mathfrak{p},\, s \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Beweis. Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist offensichtlich das größte Element der partiell geordneten Menge der Primideale $\mathfrak{q} \subset R$ mit $\mathfrak{q} \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing$. Nach Proposition 1.3.9 ist dann $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ das größte Primideal in $R_\mathfrak{p}$, und damit das eindeutige maximale Ideal. □

1.3.5 Vervollständigung

Weitere interessante lokale Ringe erhalten wir durch Vervollständigung:

Definition 1.3.29 (Vervollständigung, vollständig)**.** Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal.

- Die *Vervollständigung* von R bzgl. I (oder die *I-adische Vervollständigung* von R) ist der Ring

  $$R_I^\wedge = \varprojlim_{n\to\infty} R/I^n := \left\{ \big([a_n]\big)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; [a_n] \in R/I^n \text{ und } a_{n+1} \equiv a_n \bmod I^n \right\}$$

  mit den punktweisen Verknüpfungen.
- Die *Vervollständigung* eines R-Moduls M bzgl. I ist der $R_I^\wedge$-Modul

  $$M_I^\wedge = \varprojlim_{n\to\infty} M/I^nM := \left\{ \big([x_n]\big)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; [x_n] \in M/I^nM \text{ und } x_{n+1} \equiv x_n \bmod I^nM \right\}.$$
- R bzw. ein R-Modul M heißt *I-adisch vollständig*, wenn die kanonische Abbildung $R \to R_I^\wedge$ bzw. $M \to M_I^\wedge$ bijektiv ist.
- Ist R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so schreibt man auch $R^\wedge$ für $R_\mathfrak{m}^\wedge$ und sagt man, dass R *vollständig* ist, wenn es $\mathfrak{m}$-adisch vollständig ist.

Bemerkung 1.3.30 (adische Topologie und universelle Eigenschaft der Vervollständigung)**.** Sei $I \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Die Teilmengen $x + I^nM$ mit $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ bilden eine Basis einer Topologie auf M, die *I-adische Topologie* genannt wird. Damit ist M eine topologische Gruppe, und insbesondere ein uniformer Raum, in dem Cauchy-Folgen (und allgemeiner Cauchy-Filter) definiert sind. Die Vervollständigung $M \to M_I^\wedge$ ist dann die universelle gleichmäßig stetige Abbildung nach einem uniformen Hausdorff-Raum, in dem alle Cauchy-Filter konvergieren.

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Beispiel 1.3.25(iv):

Lemma 1.3.31. *Sei $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal und sei $n \geq 1$. Dann ist $R/\mathfrak{m}^n$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$ ein anderes maximales Ideal in R. Da $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ komaximal sind, sind auch $\mathfrak{m}^n$ und $\mathfrak{n}$ komaximal (Proposition 1.1.14). Damit ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal, das $\mathfrak{m}^n$ enthält. Die behauptung folgt nun aus Korollar 1.1.19. □

Proposition 1.3.32 (Vervollständigung bzgl. eines maximalen Ideals)**.** *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Dann ist $R_\mathfrak{m}^\wedge$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^\wedge$.*

Beweis. Wir wenden das Kriterium 1.3.26(i) an. Nach Definition ist $R^\wedge_{\mathfrak{m}}$ ein Unterring vom Produktring $\prod_{n\geq 1} R/\mathfrak{m}^n$, und das Ideal $\mathfrak{m}^\wedge_{\mathfrak{m}}$ ist der Durchschnitt $R^\wedge_{\mathfrak{m}} \cap \prod_{n\geq 1} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$, d.h., der Kern der ersten Projektion $R^\wedge_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$. Nach Lemma 1.3.31 ist jeder Ring $R/\mathfrak{m}^n$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$. Ist nun $x = (x_n)_{n\geq 1} \in R^\wedge_{\mathfrak{m}} \setminus \mathfrak{m}^\wedge_{\mathfrak{m}}$, so ist jedes x_n eine Einheit in $R/\mathfrak{m}^n$. Die inversen Elemente $y_n = x_n^{-1}$ bilden dann eine Folge $y = (y_n)_{n\geq 1} \in R^\wedge_{\mathfrak{m}}$, so dass $xy = 1$. □

Nach der universellen Eigenschaft der Skalarerweiterung (Proposition 1.2.15) gibt es zu jedem R-Modul M eine kanonische $R^\wedge_I$-lineare Abbildung

$$R^\wedge_I \otimes_R M \to M^\wedge_I.$$

Im Allgemeinen ist diese Abbildung weder injektiv noch surjektiv.

Proposition 1.3.33. *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Ist M endlich erzeugt, so ist die kanonische Abbildung $R^\wedge_I \otimes_R M \to M^\wedge_I$ surjektiv.*

Beweis. Falls $M = R^n$ ist diese Abbildung sogar bijektiv (Vervollständigung erhält endliche Summen). Sei $p\colon R^n \twoheadrightarrow M$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Wegen des kommutativen Quadrats

$$\begin{tikzcd} R^\wedge_I \otimes_R R^n \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes p"] \arrow[d, "\wr"'] & R^\wedge_I \otimes_R M \arrow[d] \\ (R^n)^\wedge_I \arrow[r, "p^\wedge"] & M^\wedge_I \end{tikzcd}$$

genügt es zu zeigen: Ist $p\colon N \twoheadrightarrow M$ surjektiv, so ist die induzierte Abbildung $p^\wedge\colon N^\wedge_I \to M^\wedge_I$ surjektiv. Sei $([x_n])_{n\geq 1}$ eine Folge in $M^\wedge_I$. Man konstruiert ein Urbild $([y_n])_{n\geq 1}$ durch Induktion über n: Ist $[y_n] \in N/I^nN$ schon konstruiert, so suchen wir ein $y_{n+1} \in N$ mit $y_{n+1} \equiv y_n \bmod I^nN$ und $p(y_{n+1}) \equiv x_{n+1} \bmod I^{n+1}M$. Es gilt nach Voraussetzung $p(y_n) \equiv x_n \equiv x_{n+1} \bmod I^nM$, so dass $x_{n+1} - p(y_n) \in I^nM$. Da $I^nN \to I^nM$ surjektiv ist, gibt es ein $\partial_n y \in I^nN$ mit $p(\partial_n y) = x_{n+1} - p(y_n)$. Setzt man $y_{n+1} = y_n + \partial_n y$, so gelten $y_{n+1} \equiv y_n \bmod I^nN$ und $p(y_{n+1}) = x_{n+1}$. □

Korollar 1.3.34. *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, das endlich erzeugt ist. Dann ist die Vervollständigung $R^\wedge_{\mathfrak{m}}$ ein vollständiger lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}R^\wedge_{\mathfrak{m}}$.*

Beweis. Nach Propositition 1.3.32 ist $R^\wedge_{\mathfrak{m}}$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}^\wedge_{\mathfrak{m}}$, und nach Proposition 1.3.33 ist $\mathfrak{m}^\wedge_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}R^\wedge_{\mathfrak{m}}$. Damit ist die n-te Potenz des maximalen Ideals gleich $\mathfrak{m}^nR^\wedge_{\mathfrak{m}}$. Nach Proposition 1.3.33 gilt weiter $(\mathfrak{m}^n)^\wedge_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^nR^\wedge_{\mathfrak{m}}$, und $(\mathfrak{m}^n)^\wedge_{\mathfrak{m}}$ ist nach Definition der Kern der kanonischen Projektion $R^\wedge_{\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}^n$, so dass

$$R^\wedge_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^nR^\wedge_{\mathfrak{m}} = R^\wedge_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}^n)^\wedge_{\mathfrak{m}} \cong R/\mathfrak{m}^n.$$

Daraus folgt, dass die kanonische Abbildung $R^\wedge_{\mathfrak{m}} \to (R^\wedge_{\mathfrak{m}})^\wedge$ ein Isomorphismus ist, d.h., $R^\wedge_{\mathfrak{m}}$ ist vollständig. □

Beispiel 1.3.35 (formale Potenzreihen)**.** Die Vervollständigung des Polynomringes in n Variablen $R[X_1, \ldots, X_n]$ bzgl. des Ideals $(X_1, \ldots, X_n)$ ist der Ring der formalen Potenzreihen $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ (siehe dazu Beispiel LA.8.2.20). Ist K ein Körper, so ist $(X_1, \ldots, X_n)$ ein maximales Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ (mit Restklassenring K). Nach Korollar 1.3.34 ist damit $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ ein vollständiger lokaler Ring mit maximalem Ideal $(X_1, \ldots, X_n)$.

Beispiel 1.3.36 (die p-adischen Zahlen)**.** Sei p eine Primzahl. Der Ring $\mathbb{Z}_p$ der *p-adischen ganzen Zahlen* ist die Vervollständigung von $\mathbb{Z}$ bzgl. des maximalen Ideals (p), d.h.:

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n\to\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} := \{([a_n])_{n\geq 1} \mid [a_n] \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ a_{n+1} \equiv a_n \pmod{p^n}\}$$

mit der punktweisen Addition bzw. Multiplikation. Nach Korollar 1.3.34 ist $\mathbb{Z}_p$ ein vollständiger lokaler Ring mit maximalem Ideal (p) und Restklassenkörper $\mathbb{F}_p$. Man kann leicht nachprüfen, dass es injektive Ringhomomorphismen

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$$

gibt. Man kann auch leicht zeigen, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Hauptidealring ist. Sein Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p$ ist der Körper der *p-adischen Zahlen.*

Die (p)-adische Topologie auf $\mathbb{Z}$ wird von der sogenannten *p-adischen Metrik*

$$d_p\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)},$$

induziert, und man kann die Elemente von $\mathbb{Z}_p$ als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Z}$ bzgl. d_p auffassen. Auf ähnliche Weise ist $\mathbb{Q}_p$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezüglich der Metrik d_p auf $\mathbb{Q}$.

Satz 1.3.37 (das Henselsche Lemma)**.** *Sei R ein vollständiger lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $f \in R[X]$ ein monisches Polynom und sei $\bar{f} \in \kappa(\mathfrak{m})[X]$ sein Reduktion modulo $\mathfrak{m}$. Jede Zerlegung $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ von $\bar{f}$ als Produkt zweier monischen Polynome mit $\mathrm{ggT}(\bar{g}, \bar{h}) = 1$ lässt sich zu einer Zerlegung $f = gh$ in $R[X]$ hochheben, wobei g und h monisch sind.*

Beweis. Seien $g_1, h_1 \in R[X]$ beliebige monische Urbilder von $\bar{g}$ und $\bar{h}$. Wir konstruieren induktiv monische Polynome $g_n, h_n \in R[X]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $f \equiv g_n h_n \bmod \mathfrak{m}^n$.

(ii) Es gilt $g_{n+1} \equiv g_n \bmod \mathfrak{m}^n$ und $h_{n+1} \equiv h_n \bmod \mathfrak{m}^n$.

Nach (ii) definieren die Folgen $(g_n \bmod \mathfrak{m}^n)_{n\geq 1}$ und $(h_n \bmod \mathfrak{m}^n)_{n\geq 1}$ Polynome g, h über dem Ring $\varprojlim_n R/\mathfrak{m}^n \cong R$, und nach (i) gilt dann $f = gh$, wie gewünscht.

Sei $n \geq 1$. Da $\mathrm{ggT}(\bar{g}, \bar{h}) = 1$ im Hauptidealring $\kappa(\mathfrak{m})[X]$, gibt es Polynome $u, v \in R[X]$ mit

$$ug + vf \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$$

(nach dem Lemma von Bézout, siehe Bemerkung LA.8.2.45). Setze

$$\begin{aligned} \partial_n g &= -v(g_n h_n - f) \in \mathfrak{m}^n[X], & g_{n+1} &= g_n + \partial_n g \in R[X], \\ \partial_n h &= -u(g_n h_n - f) \in \mathfrak{m}^n[X], & h_{n+1} &= h_n + \partial_n h \in R[X]. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion gilt (ii). Man berechnet:

$$\begin{aligned} g_{n+1}h_{n+1} - f &= g_n h_n - f + g_n \partial_n h + h_n \partial_n g + \partial_n g \cdot \partial_n h, \\ &= g_n h_n - f - g_n h_n (u g_n + v h_n) + f(u g_n + v h_n) + \partial_n g \cdot \partial_n h, \\ &= \underbrace{(g_n h_n - f)}_{\in \mathfrak{m}^n[X]} \underbrace{(1 - (u g_n + v h_n))}_{\mathfrak{m}[X]} + \underbrace{\partial_n g \cdot \partial_n h}_{\in \mathfrak{m}^{2n}[X]} \in \mathfrak{m}^{n+1}[X], \end{aligned}$$

da $2n \geq n + 1$. Also gilt auch (i) für $n + 1$. □

Korollar 1.3.38 (Newtonverfahren)**.** *Sei R ein vollständiger lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Sei $f \in R[X]$ ein monisches Polynom und sei $\bar{f} \in \kappa(\mathfrak{m})[X]$ sein Reduktion modulo $\mathfrak{m}$. Ist $\bar{a} \in \kappa(\mathfrak{m})$ eine Nullstelle von $\bar{f}$ mit $D\bar{f}(\bar{a}) \neq 0$, so gibt es ein Urbild $a \in R$ von $\bar{a}$ mit $f(a) = 0$. Dabei ist $D\bar{f}$ die Ableitung von $\bar{f}$ (Definition Alg.3.1.57).*

Beweis. Über $\kappa(\mathfrak{m})$ gibt es eine Zerlegung $\bar{f} = (X - \bar{a})\bar{g}$. Die Voraussetzung $D\bar{f}(\bar{a}) \neq 0$ impliziert, dass $\bar{a}$ keine mehrfache Nullstelle von $\bar{f}$ ist (Proposition Alg.3.1.60), d.h., dass $\mathrm{ggT}(X - \bar{a}, \bar{g}) = 1$. Man kann nun Satz 1.3.37 anwenden. □

Bemerkung 1.3.39. Ein lokaler Ring, der die Aussage vom Korollar 1.3.38 erfüllt, heißt *Henselscher lokaler Ring*. Das Henselsche Lemma 1.3.37 gilt auch für solche Ringe.

Beispiel 1.3.40.

(i) Das Polynom $X^2 + 1$ hat die einfachen Nullstellen ± 2 in $\mathbb{F}_5$. Nach Korollar 1.3.38 gibt es eine Quadratwurzel von -1 in $\mathbb{Z}_5$.

(ii) Sei K ein Körper und sei $f \in K[[T]][X]$. Sei $a \in K$ mit $f(0, a) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial X}(0, a) \neq 0$. Dann gibt es eine Potenzreihe $g \in K[[T]]$ mit $g(0) = a$ und $f(T, g) = 0$ (vgl. den Satz der impliziten Funktion aus der Analysis).

1.3.6 Lokale Eigenschaften

Unter einer „Eigenschaft" P von Moduln (oder von linearen Abbildungen, Endomorphismen, Algebren, usw.) verstehen wir die Zuteilung eines Wahrheitswerts $P(M)$ jedem Modul M über jedem Ring R. Die folgenden Aussagen sind Eigenschaften von Moduln:

- M ist trivial.
- M ist frei.
- M ist projektiv.
- M ist injektiv.
- M ist flach.
- M ist endlich erzeugt.
- M ist endlich präsentierbar.

Die meisten relevanten Eigenschaften von Moduln sind kompatibel mit Skalarerweiterung im folgenden Sinne: Hat ein R-Modul M die Eigenschaft P, so hat der S-Modul $S \otimes_R M$ die Eigenschaft P für alle Ringhomomorphismen $R \to S$. Dies gilt zum Beispiel für alle obigen Eigenschaften, außer der Injektivität. Solche Eigenschaften werden insbesondere von Lokalisierung erhalten (nach Proposition 1.3.21). Man sagt, dass eine Eigenschaft *lokal* ist, wenn sie sich umgekehrt nach geeigneter Lokalisierung überprüfen lässt:

Definition 1.3.41 (lokale Eigenschaft)**.** Sei P eine Eigenschaft von Moduln.

- P heißt *lokal* oder genauer *Zariski-lokal*, wenn für jeden Ring R, jeden R-Modul M und jede Teilmenge $E \subset R$ mit $(E) = R$ gilt: Der R-Modul M hat genau dann die Eigenschaft P, wenn für alle $f \in E$ der $R[\frac{1}{f}]$-Modul $M[\frac{1}{f}]$ die Eigenschaft P hat.
- P heißt *prim-lokal*, wenn für jeden Ring R und jeden R-Modul M gilt: Der R-Modul M hat genau dann die Eigenschaft P, wenn für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ der $R_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p}$ die Eigenschaft P hat.
- P heißt *max-lokal*, wenn für jeden Ring R und jeden R-Modul M gilt: Der R-Modul M hat genau dann die Eigenschaft P, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$ der $R_\mathfrak{m}$-Modul $M_\mathfrak{m}$ die Eigenschaft P hat.

Man definiert auf ähnliche Weise Zariski-lokale, prim-lokale und max-lokale Eigenschaften von linearen Abbildungen, Endomorphismen, Algebren, usw.

Bemerkung 1.3.42.

(i) Sei P eine Eigenschaft von Moduln, die mit Lokalisierung in Primidealen kompatibel ist (d.h., es gilt die Implikation $P(M) \Rightarrow P(M_\mathfrak{p})$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$). Dann gelten die Implikationen

$$P \text{ ist max-lokal} \implies P \text{ ist prim-lokal} \implies P \text{ ist Zariski-lokal.}$$

Nur die letztere Implikation ist nicht offenbar: Ist $(E) = R$, so gibt es zu jedem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ ein Element $f \in E \setminus \mathfrak{p}$, so dass $M_\mathfrak{p} = M[\frac{1}{f}]_\mathfrak{p}$. Gilt $P(M[\frac{1}{f}])$ für alle $f \in E$, so folgt $P(M_\mathfrak{p})$ für alle Primideale $\mathfrak{p}$, und damit $P(M)$.

(ii) In der Definition von Zariski-lokal kann man ohne Einschränkung annehmen, dass E endlich ist. Denn jede Teilmenge E mit $(E) = R$ enthält eine endliche Teilmenge $F \subset E$ mit $(F) = R$.

Proposition 1.3.43 (max-lokale Eigenschaften)**.** *Die folgenden Eigenschaften von Moduln bzw. linearen Abbildungen sind max-lokal (und insbesondere prim-lokal und Zariski-lokal):*

(i) *M ist trivial.*

(ii) *M ist flach.*

(iii) *f ist die Nullabbildung.*

(iv) *f ist injektiv.*

(v) *f ist surjektiv.*

(vi) *f ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Implikationen $P(M) \Rightarrow P(M_\mathfrak{m})$ bzw. $P(f) \Rightarrow P(f_\mathfrak{m})$ folgen jeweils aus der Exaktheit der Lokalisierung und ihrer Verträglichkeit mit dem Tensorpodukt (Proposition 1.3.21). Wir beweisen nun die umgekehrte Implikation.

Zu (i). Sei M ein R-Modul, so dass jede Lokalisierung $M_\mathfrak{m}$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ trivial ist. Sei $x \in M$ und sei $I = \{r \in R \mid rx = 0\}$. Dann ist I ein Ideal in R. Die Gleichheit $\frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$ bedeutet, dass $I \cap (R \setminus \mathfrak{m}) \neq \varnothing$, d.h., $I \not\subset \mathfrak{m}$. Da dies für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ gilt, folgt aus Proposition 1.1.21, dass $I = R$. Damit ist $x = 1x = 0$.

Zu (iii)–(vi). Man wendet (i) auf die R-Moduln $\operatorname{im} f$, $\ker f$ und $\operatorname{coker} f$ an. Sei zum Beispiel f eine lineare Abbildung, so dass alle lokalisierten Abbildungen $f_\mathfrak{m}$ injektiv sind. Nach Exaktheit der Lokalisierung (Korollar 1.3.19) ist $(\ker f)_\mathfrak{m} \cong \ker(f_\mathfrak{m})$, damit alle Moduln $(\ker f)_\mathfrak{m}$ trivial sind. Nach (i) ist dann $\ker f$ trivial, d.h., f ist surjektiv.

Zu (ii). Sei M ein R-Modul, so dass jede Lokalisierung $M_\mathfrak{m}$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ flach ist. Sei $f \colon N \hookrightarrow P$ eine injektive R-lineare Abbildung. Nach Proposition 1.2.24 genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{id}_M \otimes f$ injektiv ist. Durch Proposition 1.2.17 kann mann die lokalisierte Abbildung $(\mathrm{id}_M \otimes f)_\mathfrak{m}$ mit $\mathrm{id}_{M_\mathfrak{m}} \otimes f_\mathfrak{m}$ identifizieren. Nach der Flachheit von $M_\mathfrak{m}$ ist also $(\mathrm{id}_M \otimes f)_\mathfrak{m}$ injektiv. Nach (iv) ist nun $\mathrm{id}_M \otimes f$ injektiv. □

Bemerkung 1.3.44 (lokale Eigenschaften und Nakayama)**.** Man kann oft Proposition 1.3.43 mit dem Lemma von Nakayama kombinieren. Zum Beispiel: Ist M ein endlich erzeuger R-Modul und ist $M \otimes_R \kappa(\mathfrak{m}) = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, so gilt $M = 0$. Denn aus Nakayama folgt $M_\mathfrak{m} = 0$ für alle $\mathfrak{m}$, und somit $M = 0$ nach Proposition 1.3.43(i).

Bemerkung 1.3.45 (Projektivität und Injektivität)**.** Man kann zeigen, dass die Eigenschaft „M ist projektiv“ Zariski-lokal ist, aber nicht prim-lokal. Die Eigenschaft „M ist injektiv“ ist nicht einmal Zariski-lokal. Diese Aussagen sind aber nicht offensichtlich.

Proposition 1.3.46 (Endlichkeitsbedingungen sind Zariski-lokal)**.** *Die folgenden Eigenschaften von Moduln sind Zariski-lokal:*

(i) *M ist endlich erzeugt.*

(ii) *M ist endlich präsentierbar.*

Beweis. Seien $f_1, \dots, f_n \in R$ mit $(f_1, \dots, f_n) = R$. Die Implikationen $P(M) \Rightarrow P(M[\frac{1}{f}_i])$ folgen bereits aus Bemerkung 1.2.34 und Proposition 1.3.21.

Zu (i). Angenommen hat jeder $R[\frac{1}{f_i}]$-Modul $M[\frac{1}{f_i}]$ ein endliches Erzeugendensystem. Ohne Einschrankung ist es das Bild einer endlichen Teilmenge $E_i \subset M$. Sei $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ und sei $f \colon R^E \to M$ die induzierte R-lineare Abbildung. Da Surjektivität max-lokal und insbesondere Zariski-lokal ist (Proposition 1.3.43(v)), ist f surjektiv. Also ist M endlich erzeugt.

Zu (ii). Angenommen ist jeder $R[\frac{1}{f_i}]$-Modul $M[\frac{1}{f_i}]$ endlich präsentierbar. Nach (i) ist M endlich erzeugt. Es gibt also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to K \to R^n \to M \to 0.$$

Nach Proposition 1.2.36(iv) und Exakteit der Lokalisierung ist $K[\frac{1}{f_i}]$ endlich erzeugt. Nach (i) ist K selbst endlich erzeugt. Nach Proposition 1.2.36(iii) ist M endlich präsentierbar. □

Bemerkung 1.3.47. Die Eigenschaften aus Proposition 1.3.46 sind nicht prim-lokal.

1.3.7 Endlich erzeugte projektive Moduln

Die Freiheit eines Moduls ist keine lokale Eigenschaft. Das heißt, ein Modul kann lokal frei sein, ohne selbst frei zu sein. Betrachte zum Beispiel einen Produktring $R = A \times B$ mit $A, B \neq 0$ und den endlich erzeugten R-Modul $M = A \times \{0\}$. Seien $f = (1, 0) \in R$ und $g = (0, 1) \in R$. Die Teilmenge $\{f, g\}$ erzeugt das Einsideal in R, und es gilt

$$R[\tfrac{1}{f}] \cong A, \quad R[\tfrac{1}{g}] \cong B, \quad M[\tfrac{1}{f}] \cong A \quad \text{und} \quad M[\tfrac{1}{g}] = 0.$$

Insbesondere sind beide lokalisierten Moduln $M[\frac{1}{f}]$ und $M[\frac{1}{g}]$ frei über den entsprechenden Ringen A und B. Also ist der R-Modul M lokal frei, aber er ist nicht frei, denn $gM = 0$ und $g \neq 0$. Er ist trotzdem projektiv, als direkter Summand des freien R-Moduls R. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass dies ein allgemeines Phänomen ist: Ein endlich erzeugter R-Modul ist genau dann lokal frei, wenn er projektiv ist.

Beispiel 1.3.48 (Vektorbündel)**.** Sei X ein topologischer Raum. Ein (reeller) *Vektorbündel* über X ist eine stetige Abbildung $p \colon V \to X$ versehen mit einer Struktur von $\mathbb{R}$-Vektorraum auf jeder Faser $p^{-1}(\{x\}) \subset V$ von p, die im folgenden Sinne lokal trivial ist: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x, ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Homöomorphismus $\varphi \colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$ über U (d.h., $\pi_1 \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$), der faserweise $\mathbb{R}$-linear ist (d.h., die eingeschränkte Abbildung $\varphi_y \colon p^{-1}(\{y\}) \xrightarrow{\sim} \{y\} \times \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-linear für alle $y \in U$).

Ist $p \colon V \to X$ ein Vektorbündel über X, so ist die Menge $\Gamma(p)$ der stetigen Schnitte von p ein Modul über dem Ring $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellen Funktionen auf X (die Addition und Skalarmultiplikation sind faserweise definiert). Für den trivialen Vektorbündel $\pi_1 \colon X \times \mathbb{R}^n \to X$ gilt zum Beispiel $\Gamma(\pi_1) \cong C(X, \mathbb{R})^n$. Falls X ein kompakter Hausdorff-Raum ist, kann man zeigen, dass jeder Vektorbündel $p \colon V \to X$ ein direkter Summand eines trivialen Vektorbündel $\pi_1 \colon X \times \mathbb{R}^n \to X$ ist. Damit ist der $C(X, \mathbb{R})$-Modul $\Gamma(p)$ ein direkter Summand des freien Moduls $C(X, \mathbb{R})^n$, und insbesondere ist er endlich erzeugt und projektiv. Man kann sogar zeigen, dass in diesem Fall der Funktor

$$\Gamma \colon \{\text{Vektorbündel über } X\} \to \{\text{endlich erzeugte projektive } C(X, \mathbb{R})\text{-Moduln}\}$$

eine Äquivalenz von Kategorien ist (Satz von Swan).

In der Differentialgeometrie beweist man die folgende ähnliche Aussage: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit (nicht unbedingt kompakt), so gibt es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\Gamma \colon \{\text{glatte Vektorbündel über } M\} \xrightarrow{\sim} \{\text{endlich erzeugte projektive } C^\infty(X, \mathbb{R})\text{-Moduln}\}.$$

Lemma 1.3.49. *Seien M, P, F Moduln über R. Ist P endlich präsentierbar und ist F flach, so ist die kanonische Abbildung*

$$F \otimes_R \operatorname{Hom}_R(P, M) \to \operatorname{Hom}_R(P, F \otimes_R M), \quad x \otimes f \mapsto (y \mapsto x \otimes f(y)),$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Man wählt eine endliche Präsentation $R^m \to R^n \to P \to 0$ aus. Nach Proposition 1.2.7(i) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(P, M) \to M^n \to M^m.$$

Da F flach ist, bleibt diese Sequenz exakt, wenn man sie mit F tensoriert. Also sind die Zeilen im folgenden kommutativen Diagramm exakt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F \otimes_R \operatorname{Hom}_R(P, M) \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_R M^n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F \otimes_R M^m \arrow[d, "\wr"] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(P, F \otimes_R M) \arrow[r] & (F \otimes_R M)^n \arrow[r] & (F \otimes_R M)^m. \end{tikzcd}$$

Da die zwei letzten vertikalen Pfeile bijektiv sind (nach Distributivität von $\otimes$ über $\oplus$), ist auch der erste vertikale Pfeil bijektiv. $\square$

Satz 1.3.50 (Charakterisierung endlich erzeugter projektiver Moduln)**.** *Sei R ein Ring und P ein R-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *P ist endlich erzeugt und projektiv.*

(ii) *Es gibt einen R-Modul Q und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $P \oplus Q \cong R^n$.*

(iii) *Es gibt eine Teilmenge $E \subset R$ mit $(E) = R$, so dass für alle $f \in E$ der $R[\frac{1}{f}]$-Modul $P[\frac{1}{f}]$ endlich erzeugt und frei ist.*

(iv) *P ist endlich präsentierbar und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset R$ ist $P_\mathfrak{m}$ ein freier $R_\mathfrak{m}$-Modul.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Da P endlich erzeugt ist, gibt es eine surjektive R-lineare Abbildung $p\colon R^n \twoheadrightarrow P$. Da P projektiv ist, hat p einen Schnitt. Nach Korollar 1.2.6 ist P ein direkter Summand von R^n.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Nach Proposition 1.2.22(iv) ist P projektiv. Die Projektion $R^n \cong P \oplus Q \twoheadrightarrow P$ ist surjektiv, so dass P endlich erzeugt ist.

Zu (i) $\Rightarrow$ (iv). Da P endlich erzeugt ist, gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to Q \to R^n \to P \to 0.$$

Da P projektiv ist, ist diese Sequenz spaltend, so dass Q auch endlich erzeugt ist (nach Proposition 1.2.3). Nach Proposition 1.2.36(iii) ist damit P endlich präsentierbar. Skalarerweiterung erhält endlich erzeugte Moduln (Bemerkung 1.2.34) sowie projektive Moduln (wegen der Charakterisierung 1.2.22(iv)). Insbesondere ist $P_\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugter projektiver $R_\mathfrak{m}$-Modul. Da $R_\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring ist (Proposition 1.3.28), ist $P_\mathfrak{m}$ sogar frei (Proposition 1.2.45).

Zu (iv) $\Rightarrow$ (iii). Es genügt zu zeigen: Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ gibt es ein $f \in R \setminus \mathfrak{m}$, so dass $P[\frac{1}{f}]$ frei ist (diese Elemente f erzeugen dann das Einsideal nach Proposition 1.1.21). Sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ eine Basis von $P_\mathfrak{m}$, wobei $\bar{x}_i = \frac{x_i}{s_i}$ mit $s_i \in R \setminus \mathfrak{m}$. Sei $f = s_1 \ldots s_r$. Da $\mathfrak{m}$ prim ist, gilt $f \notin \mathfrak{m}$. Man kann dann jedes $\bar{x}_i$ als Element von $P[\frac{1}{f}]$ auffassen, und die definieren eine lineare Abbildung $h\colon R[\frac{1}{f}]^n \to P[\frac{1}{f}]$. Wir betrachten nun den Kern K und den Kokern C von h. Da $h_\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist, gilt $K_\mathfrak{m} = 0$ und $C_\mathfrak{m} = 0$. Da P endlich erzeugt ist, ist C endlich erzeugt. Sei also $\{y_1, \dots, y_m\}$ ein Erzeugendensystem von C. Da jedes y_i zu Null in $C_\mathfrak{m}$ gemacht wird, gibt es $t_i \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $t_i y_i = 0$ in C. Indem man f durch $ft_1 \dots t_m \in R \setminus \mathfrak{m}$ ersetzt, kann man also annehmen, dass jedes y_i gleich Null ist. Damit ist $C = 0$ und ist h surjektiv. Da P endlich präsentierbar ist, ist nun K auch endlich erzeugt (Proposition 1.2.36(iv)). Man kann dann ebenso durch eine geeignete Veränderung von f vereinbaren, dass $K = 0$ ist. Dann ist h ein Isomorphismus, wie gewünscht.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i). Nach Proposition 1.3.46(ii) ist P endlich präsentierbar. Sei nun $p\colon M \twoheadrightarrow N$ eine surjektive R-lineare Abbildung. Das Ziel ist es zu zeigen, dass die induzierte R-lineare Abbildung

$$p_*\colon \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

surjektiv ist. Da Surjektivität eine Zariski-lokale Eigenschaft ist (Proposition 1.3.43(v)), genügt es zu zeigen, dass für alle $f \in E$ die Abbildung

$$\mathrm{id} \otimes p_*\colon R[\tfrac{1}{f}] \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P, M) \to R[\tfrac{1}{f}] \otimes_R \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

surjektiv ist. Der R-Modul $R[\frac{1}{f}]$ ist flach nach Korollar 1.3.23. Nach Lemma 1.3.49 kann man diese Abbildung mit der Abbildung

$$p[\tfrac{1}{f}]_*\colon \mathrm{Hom}_R(P, M[\tfrac{1}{f}]) \to \mathrm{Hom}_R(P, N[\tfrac{1}{f}])$$

identifizieren. Nach der universellen Eigenschaft der Skalarerweiterung (Proposition 1.2.15) kann man sie wiederum mit der Abbildung

$$p[\tfrac{1}{f}]_*\colon \mathrm{Hom}_{R[\frac{1}{f}]}(P[\tfrac{1}{f}], M[\tfrac{1}{f}]) \to \mathrm{Hom}_{R[\frac{1}{f}]}(P[\tfrac{1}{f}], N[\tfrac{1}{f}])$$

identifizieren. Diese Abbildung ist aber surjektiv, denn $p[\frac{1}{f}]$ ist surjektiv und $P[\frac{1}{f}]$ ist projektiv nach Voraussetzung. □

1.4 Das Primspektrum

Das Primspektrum von einem Ring R ist ein topologischer Raum, dessen Punkte die Primideale von R sind.

Definition 1.4.1 (Primspektrum, Maximalspektrum)**.** Sei R ein Ring.

- Das *Primspektrum* oder *Spektrum* von R ist die Menge aller Primideale von R:

$$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p} \text{ ist ein Primideal}\}.$$

- Das *Maximalspektrum* von R ist die Menge aller maximalen Ideale von R:

$$\mathrm{mSpec}(R) := \{\mathfrak{m} \subset R \mid \mathfrak{m} \text{ ist ein maximales Ideal}\}.$$

Nach Korollar 1.1.18 gilt $\mathrm{mSpec}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$. Nach Proposition 1.1.21 gilt auch

$$\mathrm{Spec}(R) = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{mSpec}(R) = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad R = 0.$$

Beispiel 1.4.2 (der Ring der stetigen Funktionen)**.** Sei X ein topologischer Raum und sei $C(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen reellen Funktionen auf X. Jeder Punkt $x \in X$ definiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_x = \{f \in R \mid f(x) = 0\}$ in $C(X, \mathbb{R})$ mit Restklassenkörper $\mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 1.3.27). Dies definiert eine Abbildung

$$X \to \mathrm{mSpec}(C(X, \mathbb{R})), \quad x \mapsto \mathfrak{m}_x.$$

Ist X normal, so ist diese Abbildung injektiv nach dem Lemma von Urysohn. Falls X ein kompakter Hausdorff-Raum ist, ist diese Abbildung sogar bijektiv, denn: Sei I ein Ideal in

$C(X, \mathbb{R})$, das keine der Ideale $\mathfrak{m}_x$ enthält. Wir zeigen dann, dass I das Einsideal sein muss. Zu jedem $x \in X$ wählen wir eine Funktion $f_x \in I \setminus \mathfrak{m}_x$ aus. Nach Kompaktheit von X gibt es eine endliche Teilmenge $Y \subset X$, so dass die offenen Teilmengen $U_x = f_x^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ mit $x \in Y$ den ganzen Raum X überdecken. Damit ist $f = \sum_{x \in Y} f_x^2 \in I$ eine stetige Funktion auf X ohne Nullstellen, d.h., eine Einheit in $C(X, \mathbb{R})$.

Wir definieren nun eine Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ (und damit auch auf $\mathrm{mSpec}(R)$).

Definition 1.4.3 (Verschwindungsort)**.** Sei R ein Ring und $E \subset R$ eine Teilmenge. Der *Verschwindungsort* von E ist

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid E \subset \mathfrak{p}\}.$$

Man schreibt $D(E) = \mathrm{Spec}(R) \setminus V(E)$ für das Komplement.

Die Idee hinter dieser Definition ist, dass man jedes Element $f \in R$ als Funktion auf $\mathrm{Spec}(R)$ auffassen kann. Der Zielbereich dieser „Funktion“ ist aber nicht fest: Der Wert $f(\mathfrak{p})$ von f in einem Punkt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist nämlich das Bild von f im Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p})$. Es gilt also $f(\mathfrak{p}) = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathfrak{p}$, d.h., wenn $\mathfrak{p} \in V(f)$.

Bemerkung 1.4.4. Ist I das von E erzeugte Ideal, so gilt nach Definition $V(E) = V(I)$. Es gilt zudem $V(I) = V(\sqrt{I})$, da jedes Primideal ein Radikalideal ist.

Proposition 1.4.5. *Sei R ein Ring.*

(i) *Sei $(I_a)_{a \in A}$ eine Familie von Idealen in R. Dann gilt*

$$\bigcap_{a \in A} V(I_a) = V\left(\sum_{a \in A} I_a\right).$$

(ii) *Seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in R. Dann gilt*

$$V(I_1) \cup \dots \cup V(I_n) = V(I_1 \dots I_n).$$

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich und die zweite folgt aus Proposition 1.1.22. □

Definition 1.4.6 (Zariski-Topologie)**.** Sei R ein Ring. Nach Proposition 1.4.5 sind die Teilmengen $D(I) \subset \mathrm{Spec}(R)$, wobei I über die Ideale in R läuft, die offenen Teilmengen einer Topologie. Diese Topologie heißt die *Zariski-Topologie* auf $\mathrm{Spec}(R)$. Damit ist $\mathrm{Spec}(R)$ ein topologischer Raum.

Proposition 1.4.7 (abgeschlossene Teilmengen des Primspektrums)**.** *Sei R ein Ring. Dann gibt es eine inklusionsumkehrende Bijektion*

$$\{\textit{Radikalideale in } R\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{abgeschlossene Teilmengen von } \mathrm{Spec}(R)\},$$
$$I \mapsto V(I).$$

Beweis. Die Surjektivität folgt aus Bemerkung 1.4.4. Nach Korollar 1.1.28 gilt

$$I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p}$$

für alle Radikalideale I. Damit ist die Abbildung injektiv. □

Bemerkung 1.4.8 (Zariski-Topologie auf K^n)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ ist

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}$$

ein maximales Ideal in $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit Restklassenkörper K. Es gibt damit eine injektive Abbildung

$$\begin{aligned} K^n &\hookrightarrow \mathrm{mSpec}(K[X_1, \ldots, X_n]) \subset \mathrm{Spec}(K[X_1, \ldots, X_n]), \\ (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n). \end{aligned}$$

Die Zariski-Topologie auf dem Primspektrum induziert dadurch eine Topologie auf K^n, die auch *Zariski-Topologie* genannt wird. Die abgeschlossenen Teilmengen von K^n sind genau die gemeinsamen Nullstellenmengen von Familien von Polynomen:

$$V_K(E) := V(E) \cap K^n = \{x \in K^n \mid \text{für alle } f \in E \text{ gilt } f(x) = 0\}.$$

Nach Bemerkung 1.4.4 gilt dabei $V_K(E) = V_K(\sqrt{(E)})$.

Beispiel 1.4.9 (kompakte Hausdorff-Räume sind Maximalspektren)**.** Sei X ein topologischer Raum. Die Abbildung $X \to \mathrm{mSpec}(C(X, \mathbb{R}))$ aus Beispiel 1.4.2 ist stetig, wenn die Zielmenge mit der Zariski-Topologie versehen wird. Falls X normal ist, kann man sogar X mit einem Unterraum von $\mathrm{mSpec}(C(X, \mathbb{R}))$ identifizieren (d.h., jede abgeschlossene Teilmenge von X ist die Nullstellenmenge einer Familie von stetigen reellen Funktionen). Ist insbesondere X ein kompakter Hausdorff-Raum, so gibt es einen Homöomorphismus $X \cong \mathrm{mSpec}(C(X, \mathbb{R}))$.

Wie bereits erklärt, kann man Elemente von R als Funktionen auf $\mathrm{Spec}(R)$ auffassen. Auf ähnliche Weise kann man jeden R-Modul M als $\mathrm{Spec}(R)$-indizierte Familie von Vektorräumen auffassen, die jedem Punkt $\mathfrak{p}$ den $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum $M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ zuordnet. Diese geometrische Perspektive erweist sich als sehr nützlich für die Modultheorie. Als Beispiel besprechen wir noch ein paar einfache „geometrische“ Eigenschaften von Moduln.

Definition 1.4.10 (Träger eines Moduls)**.** Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Der *Träger* von M ist

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\} \subset \mathrm{Spec}(R).$$

Bemerkung 1.4.11. Ist M endlich erzeugt, so ist die Bedingung $M_\mathfrak{p} \neq 0$ zur Bedingung $M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$ äquivalent, nach dem Lemma von Nakayama.

Proposition 1.4.12. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist der Träger von M eine abgeschlossene Teilmenge von* $\mathrm{Spec}(R)$.

Beweis. Wir zeigen $\mathrm{Supp}(M) = V(I)$ mit $I = \{f \in R \mid fM = 0\}$. Sei $\mathfrak{p} \notin V(I)$, d.h., es gibt ein $f \in I \setminus \mathfrak{p}$. Da $fM = 0$ und f zu einer Einheit in $R_\mathfrak{p}$ wird, ist $M_\mathfrak{p} = 0$, d.h., $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$. Sei nun $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$. Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von M, so gibt es für jedes i ein $f_i \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $f_i x_i = 0$. Für das Produkt $f = f_1 \ldots f_n$ gilt dann $f \in R \setminus \mathfrak{p}$ (da $\mathfrak{p}$ prim ist) und $f x_i = 0$ für alle i, d.h., $f \in I$. Also gilt $I \not\subset \mathfrak{p}$, d.h., $\mathfrak{p} \notin V(I)$. □

Definition 1.4.13 (Rang eines Moduls)**.** Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Der *Rang* $\mathrm{rg}_\mathfrak{p}(M)$ von M in $\mathfrak{p}$ ist die Dimension des $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraums $M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$:

$$\mathrm{rg}_\mathfrak{p}(M) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})).$$

Bemerkung 1.4.14. Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Der Rang von M im Sinne der Definition LA.8.3.32 ist gleich $\mathrm{rg}_{(0)}(M)$.

Proposition 1.4.15 (Rang endlich erzeugter projektiver Moduln)**.** *Sei R ein Ring und P ein endlich erzeugter projektiver R-Modul. Dann ist die Rangfunktion*

$$\mathrm{Spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rg}_\mathfrak{p}(P),$$

stetig (d.h., lokal konstant).

Beweis. Nach Satz 1.3.50 gibt es eine Teilmenge $E \subset R$ mit $(E) = R$, so dass für alle $f \in E$ der $R[\frac{1}{f}]$-Modul $P[\frac{1}{f}]$ frei ist. Damit ist der Rang von P konstant auf jeder offenen Teilmenge $D(f)$ mit $f \in E$. Da diese $\mathrm{Spec}(R)$ überdecken, ist der Rang lokal konstant. □

Bemerkung 1.4.16 (Garben und lokale Eigenschaften)**.** Um die Idee einer „$\mathrm{Spec}(R)$-indizierten Familie von Vektorräumen" zu präzisieren, braucht man den Begriff der *Garbe*. Eine Garbe von Mengen $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ordnet jeder offenen Teilmenge U eine Menge $\mathcal{F}(U)$ und jeder Inklusion $V \subset U$ zwischen offenen Teilmengen eine Abbildung $\rho^U_V \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ zu, die einige Axiome erfüllen sollen. Zum einen muss diese Daten einen Funktor von der partiell geordneten Menge der offenen Teilmengen von X nach der Kategorie der Mengen bilden (dabei kann man auch die Kategorie der Mengen durch andere Kategorien ersetzen, z.B. Gruppen oder Ringe), und zum anderen gibt es ein Verklebungsaxiom für jede offene Überdeckung. Das typische Beispiel ist die Garbe der stetigen Funktionen auf X: Dabei ist $\mathcal{F}(U) = C(U, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf U, und ρ^U_V ist die Einschränkungsabbildung.

Jeder R-Modul M definiert eine solche Garbe auf $\mathrm{Spec}(R)$, deren Wert auf der offenen Teilmenge $D(f)$ der lokalisierte Modul $M[\frac{1}{f}]$ ist. Dadurch hängt der Begriff der Zariski-Lokalität aus Definition 1.3.41 mit der Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ zusammen: Grob gesagt ist eine Eigenschaft von Moduln Zariski-lokal, wenn sie sich in einer offenen Umgebung jedes Punktes in $\mathrm{Spec}(R)$ überprüfen lässt.

Bemerkung 1.4.17 (Geringte Räume, Schemata und Mannigfaltigkeiten)**.** Auf dem topologischen Raum $\mathrm{Spec}(R)$ kann man eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}_R$ konstruieren, so dass für alle $f \in R$ gilt $\mathcal{O}_R(D(f)) = R[\frac{1}{f}]$. Diese Garbe heißt *Strukturgarbe* auf $\mathrm{Spec}(R)$. Für eine beliebige offene Teilmenge $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ soll man den Ring $\mathcal{O}_R(U)$ als „Ring der algebraischen Funktionen auf U" auffassen. Der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ ist dann der Ring der algebraischen Funktionskeime im Punkt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$: $R_\mathfrak{p} = \varinjlim_{U \ni \mathfrak{p}} \mathcal{O}_R(U)$ (siehe Beispiel 1.3.27).

Ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einem topologischem Raum X und eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}$ auf X heißt *geringter Raum*. Ein geringter Raum der Form $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_R)$ heißt *affines Schema*. Ein *Schema* ist dann ein geringter Raum $(X, \mathcal{O})$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Punkt in X hat eine offene Umgebung, die zu einem affinen Schema isomorph ist. Schemata sind die grundlegenden Objekte, die man in der Algebraischen Geometrie untersucht.

Die Definition von Schema kann man mit der folgenden Definition von Mannigfaltigkeit vergleichen. Sei B eine Differenzierbarkeitsbedingung, wie zum Beispiel „stetig", „differenzierbar", „stetig differenzierbar", „glatt" oder „analytisch". Die B-Funktionen bilden dann eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}^B$ auf $\mathbb{R}^n$, wobei $\mathcal{O}^B(U)$ der Ring der B-Funktionen $U \to \mathbb{R}$ ist. Eine *B-Mannigfaltigkeit* ist dann ein geringter Raum $(X, \mathcal{O})$ mit folgender Eigenschaft: Jeder Punkt in X hat eine offene Umgebung, die zu $(U, \mathcal{O}^B)$ isomorph ist, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge ist. Man kann leicht zeigen, dass diese Definition von Mannigfaltigkeit äquivalent zur üblicheren Definition mit B-Atlanten ist. Ein Schema ist also eine Art von Mannigfaltigkeit, in der Primspektren die Rolle der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ spielen.

1.4.1 Funktorialität des Primspektrums

Das Primspektrum ist ein kontravarianter Funktor: Ist $f \colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so gibt es eine induzierte stetige Abbildung

$$\mathrm{Spec}(f) \colon \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R), \quad \mathfrak{p} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{p}).$$

Die Stetigkeit folgt daraus, dass das Urbild von $V(I)$ unter $\mathrm{Spec}(f)$ gleich $V(f(I))$ ist. Im Gegensatz dazu ist das Maximalspektrum *nicht* funktoriell, denn das Urbild eines maximalen Ideals ist nicht unbedingt maximal. Das ist ein Grund dafür, dass wir das Primspektrum dem Maximalspektrum vorziehen.

Proposition 1.4.18 (Primspektren von Restklassenringen). *Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal und $q\colon R \to R/I$ die Quotientenabbildung. Dann ist*

$$\mathrm{Spec}(q)\colon \mathrm{Spec}(R/I) \to \mathrm{Spec}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, die einen Homöomorphismus $\mathrm{Spec}(R/I) \xrightarrow{\sim} V(I)$ induziert.

Beweis. Nach Korollar 1.1.19 bildet die Abbildung $\mathfrak{p} \mapsto q^{-1}(\mathfrak{p})$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Spec}(R/I)$ und $V(I)$. Diese Bijektion bildet die Teilmenge $V(K)$ auf $V(q^{-1}(K))$ ab. Nach Proposition 1.1.7 ist sie damit ein Homöomorphismus. □

Proposition 1.4.19 (Primspektren von Lokalisierungen). *Sei R ein Ring, $T \subset R$ eine Teilmenge, $S \subset R$ der multiplikative Abschluss von T und $j\colon R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung. Dann ist*

$$\mathrm{Spec}(j)\colon \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \to \mathrm{Spec}(R)$$

eine Einbettung, die einen Homöomorphismus $\mathrm{Spec}(S^{-1}R) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{f\in T} D(f)$ induziert. Insbesondere: Ist T endlich, so ist $\mathrm{Spec}(j)$ eine offene Einbettung.

Beweis. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R, so gilt $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} \cap T = \varnothing$. Nach Proposition 1.3.9 ist $\mathrm{Spec}(j)$ injektiv mit Bild

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap T = \varnothing\} = \bigcap_{f\in T} D(f).$$

Sei $I \subset S^{-1}R$ ein Ideal. Dann ist $j^{-1}(I)$ ein Ideal in R mit $j(j^{-1}(I)) = I$ (siehe den Beweis von Proposition 1.3.9). Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset S^{-1}R$ gilt also

$$I \subset \mathfrak{q} \iff j(j^{-1}(I)) \subset \mathfrak{q} \iff j^{-1}(I) \subset j^{-1}(\mathfrak{q}),$$

und damit $\mathrm{Spec}(j)(D(I)) = D(j^{-1}(I))$. Also ist $\mathrm{Spec}(j)$ eine offene stetige Abbildung und somit ein Homöomorphismus nach seinem Bild. □

Beispiel 1.4.20. Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Man kann dann $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$ mit dem abgeschlossenen Unterraum $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\}$ von $\mathrm{Spec}(R)$ identifizieren, und $\mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$ mit dem Unterraum $\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$. Der letztere ist der Durchschnitt aller offenen Umgebungen vom Punkt $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Spec}(R)$.

Proposition 1.4.21 (Primspektren von Produkten). *Seien R und S Ringe. Dann gibt es einen Homöomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(R) \sqcup \mathrm{Spec}(S) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(R \times S), \\ (\mathfrak{p} \subset R) &\mapsto \mathfrak{p} \times S, \\ (\mathfrak{q} \subset S) &\mapsto R \times \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Beweis. Jedes Ideal im Produktring $R \times S$ hat die Form $I \times J$ für Ideale $I \subset R$ und $J \subset S$, und die Primideale sind genau die Ideale $\mathfrak{p} \times S$ und $R \times \mathfrak{q}$ für Primideale $\mathfrak{p} \subset R$ und $\mathfrak{q} \subset S$ (wegen $(1, 0)(0, 1) = 0$ muss jedes Primideal entweder $(1, 0)$ oder $(0, 1)$ enthalten). Dies impliziert die Aussage. □

Die *Fasern* einer Abbildung $X \to Y$ sind die Urbilder der einelementigen Teilmengen von Y.

Proposition 1.4.22 (Primspektren und Fasern). *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ und sei $\varphi\colon S \to S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ der Ringhomomorphismus $s \mapsto s \otimes 1$. Dann induziert $\mathrm{Spec}(\varphi)$ einen Homöomorphismus*

$$\mathrm{Spec}(S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(f)^{-1}(\{\mathfrak{p}\}).$$

Beweis. Es gibt kanonische Isomorphismen von S-Algebren

$$S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \cong S \otimes_R R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \cong S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p},$$

wobei $S_\mathfrak{p} = f(R \setminus \mathfrak{p})^{-1}S$ (Propositionen 1.3.16, 1.3.21 und 1.2.9). Nach Propositionen 1.4.18 und 1.4.19 ist damit $\mathrm{Spec}(\varphi)$ ein Homöomorphismus nach seinem Bild in $\mathrm{Spec}(S)$. Wegen des kommutativen Quadrats

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\varphi"] \\ \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[r] & S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

ist das Bild von $\mathrm{Spec}(\varphi)$ in der Faser $\mathrm{Spec}(f)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ enthalten. Sei umgekehrt $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ mit $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{q} \cap f(R \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing$. Nach Proposition 1.3.9 ist $\mathfrak{q}$ das Urbild des Primideals $\mathfrak{q}S_\mathfrak{p} \subset S_\mathfrak{p}$. Da dieses Ideal $\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ enthält, ist es wiederum das Urbild eines Primideals im Restklassenring $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ (Korollar 1.1.19). Damit liegt $\mathfrak{q}$ im Bild von $\mathrm{Spec}(\varphi)$. □

Wegen Proposition 1.4.22 heißt auch der Ring $S \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ die *Faser* des Ringhomomorphismus $R \to S$ über dem Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.

1.4.2 Topologische Eigenschaften

Die Zariski-Topologie ist von ganz anderer Art als die Topologien, die man in der Analysis verwendet. Zum Beispiel sind Punkte in $\mathrm{Spec}(R)$ nicht unbedingt abgeschlossen: Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so besteht der Abschluss $\overline{\{\mathfrak{p}\}}$ aus allen Primidealen, die $\mathfrak{p}$ enthalten. Damit ist $\{\mathfrak{p}\}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}$ maximal ist. Anders gesagt ist das Maximalspektrum $\mathrm{mSpec}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$ genau die Teilmenge der abgeschlossenen Punkte. Insbesondere ist $\mathrm{Spec}(R)$ kein Hausdorff-Raum, sofern $\mathrm{mSpec}(R) \neq \mathrm{Spec}(R)$. In diesem Abschnitt zeigen wir unter anderem, dass das Primspektrum $\mathrm{Spec}(R)$ ein sogenannter *spektraler Raum* ist.

Definition 1.4.23 (irreduzibler Raum)**.** Sei X ein topologischer Raum.

- X heißt *irreduzibel*, wenn er nicht leer ist, und wenn er keine Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen ist.
- Ein *generischer Punkt* von X ist ein Punkt $x \in X$, so dass $\overline{\{x\}} = X$.

Bemerkung 1.4.24. Sei X ein topologischer Raum.

(i) Wenn X einen generischen Punkt enthält, dann ist X irreduzibel.

(ii) Ist X irreduzibel mit $|X| \geq 2$, so ist X kein Hausdorff-Raum.

Sei X ein topologischer Raum. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist sein Abschluss $\overline{\{x\}}$ eine irreduzible Teilmenge von X mit generischem Punkt x. Dies definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Punkte von } X\} &\to \{\text{irreduzible abgeschlossene Teilmengen von } X\}, \\ x &\mapsto \overline{\{x\}}, \end{aligned}$$

die im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv sein muss.

Definition 1.4.25 (nüchterner Raum)**.** Ein topologischer Raum X heißt *nüchtern*, wenn die obige Abbildung bijektiv ist, d.h., wenn jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X genau einen generischen Punkt enthält.

Bemerkung 1.4.26. Jeder Hausdorff-Raum ist nüchtern, denn die irreduziblen Teilmengen sind genau die einelementigen Teilmengen.

Definition 1.4.27 (spektraler Raum)**.** Ein topologischer Raum X heißt *spektral*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) X ist nüchtern.

(ii) Die kompakten offenen Teilmengen von X bilden eine Basis der Topologie, d.h., jede offene Teilmenge von X ist eine Vereinigung von kompakten offenen Teilmengen.

(iii) Ein endlicher Durchschnitt von kompakten offenen Teilmengen ist wieder kompakt (insbesondere ist X selbst kompakt).

Proposition 1.4.28 (topologische Eigenschaften des Primspektrums)**.** *Sei R ein Ring.*

(i) $\mathrm{Spec}(R)$ *ist ein spektraler Raum.*

(ii) *Die offenen Teilmengen $D(f) \subset \mathrm{Spec}(R)$ mit $f \in R$ sind kompakt und bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf* $\mathrm{Spec}(R)$*.*

(iii) *Sei $I \subset R$ ein Ideal. Die Teilmenge $V(I) \subset \mathrm{Spec}(R)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{I}$ ein Primideal ist. In diesem Fall ist $\sqrt{I} \in \mathrm{Spec}(R)$ der einzige generische Punkt von $V(I)$.*

Beweis. Zu (ii). Nach Definition gilt $D(E) = \bigcup_{f \in E} D(f)$, so dass die Teilmengen $D(f)$ eine Basis der Topologie bilden. Nach Proposition 1.4.19 ist $D(f)$ homöomorph zu $\mathrm{Spec}(R[\frac{1}{f}])$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathrm{Spec}(R)$ kompakt ist. Sei $E \subset R$ eine Teilmenge mit $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{f \in E} D(f) = D(E)$, d.h., $V(E) = \varnothing$. Dies beteutet, dass kein Primideal die Teimenge E enthält. Aus Proposition 1.1.21 folgt $(E) = R$. Insbesondere gibt es $f_1, \dots, f_n \in E$ und $g_1, \dots, g_n \in R$ mit $1 = \sum_{i=1}^n g_i f_i$. Also gilt $(f_1, \dots, f_n) = R$ und damit $\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$.

Zu (iii). Sei $V(I)$ irreduzibel und sei $xy \in \sqrt{I}$. Dann gilt $V(I) \subset V(xy) = V(x) \cup V(y)$ und damit $V(I) \subset V(x)$ oder $V(I) \subset V(y)$, d.h., $x \in \sqrt{I}$ oder $y \in \sqrt{I}$ (Proposition 1.4.7). Zudem ist $\sqrt{I} \neq R$, da $V(I)$ nicht leer ist. Also ist $\sqrt{I}$ ein Primideal.

Sei umgekehrt $\sqrt{I}$ prim. Ist $V(I) \subset V(J) \cup V(K) = V(JK)$, so folgt aus Propositionen 1.4.7 und 1.1.22, dass $J \subset \sqrt{I}$ oder $K \subset \sqrt{I}$, d.h., $V(I) \subset V(J)$ oder $V(I) \subset V(K)$. Also ist $V(I)$ irreduzibel.

Zu (i). Nach (iii) ist $\mathrm{Spec}(R)$ ein nüchterner Raum. Nach (ii) sind die kompakten offenen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$ genau die Teilmengen $D(E)$ mit einer endlichen Teilmenge $E \subset R$, und die bilden eine Basis der Topologie. Wegen $D(I_1) \cap \dots \cap D(I_n) = D(I_1 \dots I_n)$ (Proposition 1.4.5(ii)) und der Tatsache, dass $I_1 \dots I_n$ endlich erzeugt ist, wenn die Ideale $I_1, \dots, I_n$ endlich erzeugt sind, schließen wir, dass endliche Durchschnitte kompakter offener Teilmengen wieder kompakt sind. □

Korollar 1.4.29. *Sei R ein Ring. Dann ist* $\mathrm{Spec}(R)$ *genau dann irreduzibel, wenn das Nilradikal $\sqrt{0}$ ein Primideal ist. Insbesondere: Ist R ein Integritätsring, so ist* $\mathrm{Spec}(R)$ *irreduzibel.*

Bemerkung 1.4.30. Man kann zeigen, dass jeder spektrale Raum zum Primspektrum eines Ringes homöomorph ist (Satz von Hochster).

Beispiel 1.4.31 (die affine Gerade über einem Körper)**.** Sei K ein Körper. Die Punkte von $\mathrm{Spec}(K[X])$ sind:

(i) Das Primideal (0), das der generische Punkt von $\mathrm{Spec}(K[X])$ ist.

(ii) Die maximalen Ideale (f) mit $f \in K[X]$ monisch und irreduzibel.

Die nicht-leeren offenen Teilmengen sind genau die Komplemente endlicher Mengen von Punkten vom Typ (ii). Insbesondere ist die induzierte Topologie auf $\mathrm{mSpec}(K[X])$ die kofinite Topologie. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, gilt einfach

$$\mathrm{Spec}(K[X]) = \{(X - a) \mid a \in K\} \cup \{(0)\} \cong K \cup \{(0)\}.$$

Jeder irreduzible Raum ist zusammenhängend. Analog zu den Zusammenhangskomponenten kann man die irreduziblen Komponenten eines Raums definieren:

Definition 1.4.32 (irreduzible Komponente)**.** Sei X ein topologischer Raum. Eine *irreduzible Komponente* von X ist eine maximale irreduzible Teilmenge von X.

Lemma 1.4.33. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann irreduzibel, wenn ihr Abschluss $\bar{A}$ irreduzibel ist.*

Beweis. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann irreduzibel, wenn sie nicht leer ist, und wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $Y, Z \subset X$ gilt: Ist $A \subset Y \cup Z$, so folgt $A \subset Y$ oder $A \subset Z$. Da Y, Z und $Y \cup Z$ abgeschlossen sind, ändert sich diese Aussage nicht, wenn man A durch $\bar{A}$ ersetzt. ☐

Proposition 1.4.34 (Eigenschaften der irreduziblen Komponente)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) *Jede irreduzible Komponente von X ist abgeschlossen.*

(ii) *Jede irreduzible Teilmenge von X ist in einer irreduziblen Komponente enthalten.*

(iii) *X ist die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten.*

Beweis. *Zu* (i). Dies folgt aus Lemma 1.4.33.

Zu (ii). Dies folgt aus dem Zornschen Lemma, indem man zeigt, dass jede nichtleere Kette von irreduziblen Teilmengen eine obere Schranke besitzt: Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine solche Kette, so ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ wieder irreduzibel.

Zu (iii). Dies folgt aus (ii), da einelementige Teilmengen irreduzibel sind. ☐

Proposition 1.4.35 (irreduzible Komponenten des Primspektrums)**.** *Sei R ein Ring. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\{\textit{minimale Primideale von } R\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{irreduzible Komponenten von } \operatorname{Spec}(R)\},$$
$$\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p}).$$

Außerdem enthält jedes Primideal ein minimales Primideal.

Beweis. Die Bijektion folgt aus Proposition 1.4.28(iii), und die zweite Aussage aus Proposition 1.4.34(ii). ☐

Beispiel 1.4.36 (die Koordinatenachsen in der Ebene)**.** Sei K ein Körper und sei $R = K[X,Y]/(XY)$. Jedes Primideal in R muss X oder Y enthalten, da es $XY = 0$ enthält. Die Primideale in R sind also

(i) die Ideale (X) und (Y),

(ii) die Ideale (f, Y) und (X, g), wobei $f \in K[X]$ und $g \in K[Y]$ monische irreduzible Polynome sind.

Die Ideale aus (ii) sind die maximalen Ideale, und die aus (i) sind die minimalen Primideale. Damit hat $\operatorname{Spec}(R)$ zwei irreduzible Komponenten:

$$\overline{\{(X)\}} = \{(X)\} \cup \{(X, g) \mid g \in K[Y] \text{ monisch und irreduzibel}\} \cong \operatorname{Spec}(K[Y]),$$
$$\overline{\{(Y)\}} = \{(Y)\} \cup \{(f, Y) \mid f \in K[X] \text{ monisch und irreduzibel}\} \cong \operatorname{Spec}(K[X]).$$

Ihr Durchschnitt ist die einelementige Menge $\{(X,Y)\}$. Als topologischer Raum ist also $\operatorname{Spec}(R)$ die Verklebung der affinen Geraden $\operatorname{Spec}(K[X])$ und $\operatorname{Spec}(K[Y])$, wobei man die Punkte (X) und (Y) identifiziert.

Definition 1.4.37 (idempotent)**.** Sei R ein Ring. Ein Element $e \in R$ heißt *idempotent*, wenn $e^2 = e$. Man schreibt $\mathrm{Idem}(R) \subset R$ für die Teilmenge der idempotenten Elemente. Es gilt stets $\{0, 1\} \subset \mathrm{Idem}(R)$.

Lemma 1.4.38. *Sei R ein Ring und sei $E \subset R$ eine Teilmenge mit $(E) = R$. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$R \to \prod_{f \in E} R[\tfrac{1}{f}]$$

injektiv.

Beweis. Sei x im Kern, d.h.: Für alle $f \in E$ gibt es ein $n_f \in \mathbb{N}$ mit $f^{n_f} x = 0$. Sei $E' = \{f^{n_f} \mid f \in E\}$. Das Ideal (E') ist dann auch gleich R, denn sein Radikal enthält $(E) = R$. Das Ideal $\{r \in R \mid rx = 0\}$ enthält E' und damit auch 1. Also gilt $x = 1x = 0$. □

Lemma 1.4.39. *Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit Kern I. Dann ist $V(I)$ gleich dem Abschluss des Bildes von* $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$.

Beweis. Wegen der Faktorisierung $R \to R/I \to S$ ist das Bild von $\mathrm{Spec}\, f$ in $V(I)$ enthalten. Sei nun J ein Ideal, so dass $V(J)$ das Bild von $\mathrm{Spec}(f)$ enthält. Das heißt: Für jedes Primideal $\mathfrak{q} \subset S$ gilt $J \subset f^{-1}(\mathfrak{q})$. Daraus folgt mit Proposition 1.1.27:

$$J \subset \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)} f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{q} \right) = f^{-1}(\sqrt{0}) = \sqrt{I},$$

und damit $V(I) \subset V(J)$. Also ist $V(I)$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, das das Bild von $\mathrm{Spec}(f)$ enthält. □

Proposition 1.4.40 (Zusammenhang des Primspektrums)**.** *Sei R ein Ring. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \mathrm{Idem}(R) &\xrightarrow{\sim} \{\textit{offene abgeschlossene Teilmengen von } \mathrm{Spec}(R)\}, \\ e &\mapsto V(e). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathrm{Spec}(R)$ *genau dann zusammenhängend, wenn* $\mathrm{Idem}(R) = \{0, 1\}$ *und* $1 \neq 0$.

Beweis. Ist $e \in \mathrm{Idem}(R)$, so ist $1 - e$ auch idempotent: $(1 - e)^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$. Zudem gilt $e(1 - e) = e - e = 0$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gilt also entweder $e \in \mathfrak{p}$ oder $1 - e \in \mathfrak{p}$ (und nicht beides, da $1 \notin \mathfrak{p}$), so dass $\mathrm{Spec}(R)$ die disjunkte Vereinigung von $V(e)$ und $V(1-e)$ ist. Da beide Teilmengen abgeschlossen sind, sind sie auch offen. Also ist die gegebene Abbildung wohldefiniert.

Zur Injektivität. Seien $e, e' \in \mathrm{Idem}(R)$ mit $e \neq e'$. Also gilt $0 \neq e - e' = e(1-e') - e'(1-e)$, so dass $e(1 - e') \neq 0$ oder $e'(1 - e) \neq 0$. Ohne Einschränkung ist $e'(1 - e) \neq 0$. Da $e'(1 - e)$ idempotent ist, ist es dann nicht nilpotent. Nach Proposition 1.1.27 gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $e'(1 - e) \notin \mathfrak{p}$, d.h., $e' \notin \mathfrak{p}$ und $1 - e \notin \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} \in V(e) \setminus V(e')$ und insbesondere $V(e) \neq V(e')$.

Zur Surjektivität. Sei $K \subset \mathrm{Spec}(R)$ eine offene abgeschlossene Teilmenge und sei L ihr Komplement. Da K abgeschlossen ist, ist es kompakt und damit hat die Form $D(E)$, wobei $E \subset R$ eine endliche Teilmenge ist (Proposition 1.4.28(ii)). Sei I der Kern der kanonischen Abbildung $j\colon R \to \prod_{f \in E} R[\frac{1}{f}]$. Nach Propositionen 1.4.19 und 1.4.21 ist das Bild von $\mathrm{Spec}(j)$ genau gleich $D(E) = K$. Da K abgeschlossen ist, ist dann $K = V(I)$ nach Lemma 1.4.39. Auf ähnliche Weise gibt es eine endliche Teilmenge F mit $L = D(F) = V(J)$, wobei J der Kern der Abbildung $R \to \prod_{g \in F} R[\frac{1}{g}]$ ist. Da $D(E \cup F) = K \cup L = \mathrm{Spec}(R)$ gilt $(E \cup F) = R$, so dass $I \cap J = 0$ nach Lemma 1.4.38. Da $V(I + J) = V(I) \cap V(J) = K \cap L = \varnothing$ gilt $I + J = R$, d.h., I und J sind komaximal. Aus dem chinesischen Restsatz (Satz 1.1.13) folgt nun

$$R \xrightarrow{\sim} R/I \times R/J.$$

Sei $e \in R$ das Urbild von $(0, 1)$. Dann ist e idempotent und erfüllt $V(e) = V(I) = K$. □

Bemerkung 1.4.41. Mit Proposition 1.4.40 kann man weiter zeigen, dass die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ gleich $V(\operatorname{Idem}(R) \cap \mathfrak{p})$ ist.

Kapitel 2

Ganze Ringerweiterungen

2.1 Der Begriff der Ganzheit

2.1.1 Endlichkeitsbedingungen für Algebren

Sei A ein Ring. Man erinnert daran, dass eine (kommutative) A-Algebra B nichts anders als ein Ringhomomorphismus $A \to B$ ist (Proposition LA.8.1.50). Im Folgenden werden wir "Algebra" und "Ringhomomorphismus" austauschbar verwenden.

Definition 2.1.1 (endlich erzeugte/präsentierbare Algebra)**.** Sei A ein Ring.

(i) Eine A-Algebra B heißt *endlich erzeugt*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen surjektiven A-Algebrenhomomorphismus

$$A[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow B$$

existiert.

(ii) Eine A-Algebra B heißt *endlich präsentierbar*, wenn es $n, m \in \mathbb{N}$ und einen A-Algebrenisomorphismus der Form

$$A[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m) \xrightarrow{\sim} B$$

existiert.

Wir geben ein paar rountinemäßige Eigenschaften dieser Definitionen an.

Proposition 2.1.2 (Komposition endlich erzeugter/präsentierbarer Homomorphismen)**.** *Seien $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen.*

(i) *Sind φ und ψ endlich erzeugt, so ist $\psi \circ \varphi$ endlich erzeugt.*

(ii) *Ist $\psi \circ \varphi$ endlich erzeugt, so ist ψ endlich erzeugt.*

(iii) *Sind φ und ψ endlich präsentierbar, so ist $\psi \circ \varphi$ endlich präsentierbar.*

(iv) *Ist $\psi \circ \varphi$ endlich präsentierbar und ist φ endlich erzeugt, so ist ψ endlich präsentierbar.*

Beweis. Zu (i). Sind $\alpha\colon A[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow B$ und $\beta\colon B[Y_1, \ldots, Y_m] \twoheadrightarrow C$ surjektive Fortsetzungen von φ und ψ, so ist der A-Algebrenhomomorphismus

$$A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m] \to C, \quad X_i \mapsto \psi(\alpha(X_i)), \quad Y_j \mapsto \beta(Y_j), \tag{2.1.3}$$

surjektiv.

Zu (ii). Ist $\alpha\colon A[X_1,\dots,X_n] \twoheadrightarrow C$ ein surjektiver A-Algebrenhomomorphismus, so ist der B-Algebrenhomomorphismus

$$B[X_1,\dots,X_n] \to C, \quad X_i \mapsto \alpha(X_i),$$

auch surjektiv.

Zu (iii). Es gibt α und β wie im Beweis von (i) mit endlich erzeugten Kernen $(f_1,\dots,f_k)$ und $(g_1,\dots,g_l)$. Ist $h_i \in A[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m]$ ein Urbild von g_i unter α, so ist der Kern von (2.1.3) gleich dem endlich erzeugten Ideal $(f_1,\dots,f_k,h_1,\dots,h_l)$.

Zu (iv). Sei ohne Einschränkung

$$C = A[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_m) \quad \text{und} \quad B = A[Y_1,\dots,Y_r]/I.$$

Sei $g_i \in A[X_1,\dots,X_n]$ ein Urbild von $\psi([Y_i]) \in C$ und sei h_i das Bild von g_i in $B[X_1,\dots,X_n]$. Dann gibt es einen Isomorphismus von B-Algebren

$$C \cong B[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_m,[Y_1]-h_1,\dots,[Y_r]-h_r). \qquad \square$$

Proposition 2.1.4 (endlich präsentierbare Surjektionen)**.** *Ein surjektiver Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \twoheadrightarrow B$ ist genau dann endlich präsentierbarer, wenn das Ideal* $\ker\varphi \subset A$ *endlich erzeugt ist.*

Beweis. Ist $\ker\varphi$ endlich erzeugt, so ist φ endlich präsentierbar nach Definition. Sei umgekehrt $B = A[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_m)$. Da φ surjektiv ist, hat jedes $[X_i] \in B$ ein Urbild $a_i \in A$. Nach der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra gibt es einen A-Algebrenhomomorphismus $\psi\colon A[X_1,\dots,X_n] \to A$ mit $\psi(X_i) = a_i$:

$$\begin{tikzcd} A[X_1,\dots,X_n] \arrow[d, dashed, "\psi"'] \arrow[dr, two heads, "q"] & \\ A \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & B. \end{tikzcd}$$

Ein solches ψ ist automatisch surjektiv (da $\psi(a) = a$ für alle $a \in A$), und daraus folgt $\ker\varphi = \psi(\ker q) = (\psi(f_1),\dots,\psi(f_m))$. $\square$

Bemerkung 2.1.5. Sei $B = A[X_1,\dots,X_n]/I$ eine endlich erzeugte A-Algebra. Aus Propositionen 2.1.2(iv) und 2.1.4 folgt, dass B genau dann endlich präsentierbar ist, wenn I ein endlich erzeugtes Ideal ist.

Proposition 2.1.6 (endlich präsentierbare Lokalisierungen)**.** *Sei A ein Ring und sei $S \subset A$ der multiplikative Abschluss einer endlichen Teilmenge. Dann ist $S^{-1}A$ eine endlich präsentierbare A-Algebra.*

Beweis. Sei S der multiplikative Abschluss von $\{f_1,\dots,f_n\}$. Dann gilt

$$S^{-1}A \cong A[X_1,\dots,X_n]/(f_1X_1-1,\dots,f_nX_n-1)$$

nach Vergleich universeller Eigenschaften. $\square$

Definition 2.1.7 (endlicher Ringhomomorphismus)**.** Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ (oder eine A-Algebra B) heißt *endlich*, wenn B als A-Modul endlich erzeugt ist.

Bemerkung 2.1.8 (endlich $\Rightarrow$ endlich erzeugt)**.** Jede endliche A-Algebra B ist endlich erzeugt, denn: Ist $\{b_1,\dots,b_n\}$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul, so ist der induzierte A-Algebrenhomomorphismus $A[X_1,\dots,X_n] \to B$ mit $X_i \mapsto b_i$ surjektiv. Die Umkehrung gilt nicht: Zum Beispiel sind die Ringhomomorphismen $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[X]$ oder $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ endlich erzeugt aber nicht endlich.

Beispiel 2.1.9.

(i) Jeder surjektive Ringhomomorphismus ist endlich.

(ii) Jede endliche Körpererweiterung $K \hookrightarrow L$ ist ein endlicher Ringhomomorphimus.

(iii) Die Gaußschen Zahlen bilden eine endliche $\mathbb{Z}$-Algebra $\mathbb{Z}[i]$: $\{1, i\}$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}[i]$.

(iv) Sei A ein Ring und $f \in A[X]$ ein monisches Polynom vom Grad d. Dann ist die A-Algebra $A[X]/(f)$ endlich. Denn die Potenzen X^i mit $0 \leq i < d$ bilden eine Basis des A-Moduls $A[X]/(f)$ (siehe Lemma LA.9.2.5).

Proposition 2.1.10 (Komposition endlicher Homomorphismen)**.** *Seien $\varphi\colon A \to B$ und $\psi\colon B \to C$ Ringhomomorphismen.*

(i) *Sind φ und ψ endlich, so ist $\psi \circ \varphi$ endlich.*

(ii) *Ist $\psi \circ \varphi$ endlich, so ist ψ endlich.*

Beweis. Zu (i). Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls B und sei $\{c_1, \ldots, c_m\}$ ein Erzeugendensystem des B-Moduls C. Dann bilden die Produkte $\psi(b_i)c_j$ ein Erzeugendensystem des A-Moduls C.

Zu (ii). Jedes Erzeugendensystem von C als A-Modul ist auch ein Erzeugendensystem als B-Modul. □

2.1.2 Ganze Ringhomomorphismen

Sei A ein Ring und B eine A-Algebra. Nach der universellen Eigenschaft der Polynomalgebra $A[X]$ (Proposition LA.8.1.45) gibt es zu jedem Element $b \in B$ genau einen A-Algebrenhomomorphismus

$$\varepsilon_b\colon A[X] \to B \quad \text{mit} \quad \varepsilon_b(X) = b,$$

der *Einsetzungshomomorphimsmus* zu b genannt wird. Für ein Polynom $p \in A[X]$ schreibt man üblicherweise $p(b) \in B$ anstelle von $\varepsilon_b(p)$.

Definition 2.1.11 (ganzes Element, ganzer Ringhomomorphismus, ganze Ringerweiterung)**.** Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

- Ein Element $b \in B$ heißt *ganz* über A, wenn ein *monisches* Polynom $p \in A[X]$ mit $p(b) = 0$ existiert. Ein solches p heißt *Ganzheitsgleichung* für b über A.
- Der Ringhomomorphismus φ (oder die A-Algebra B) heißt *ganz*, wenn jedes Element von B ganz über A ist. Wenn φ injektiv ist, sagt man auch, dass B eine *ganze Ringerweiterung* von A ist.

Bemerkung 2.1.12.

(i) Jeder surjektive Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \twoheadrightarrow B$ ist ganz, denn: Ist $a \in A$ ein Urbild von $b \in B$, so ist $p = X - a \in A[X]$ ein monisches Polynom mit $p(b) = 0$.

(ii) Ein beliebiger Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ lässt sich als

$$A \twoheadrightarrow \varphi(A) \hookrightarrow B$$

faktorisieren. Nach Definition ist φ genau dann ganz, wenn $\varphi(A) \subset B$ eine ganze Ringerweiterung ist.

Beispiel 2.1.13 (Ganzheit und das Lemma von Gauß)**.** Sei A ein faktorieller Ring und sei $p \in A[X]$ ein monisches Polynom. Nach dem Lemma von Gauß liegt jede Nullstelle von p im Quotientenkörper $Q(A)$ bereits in A (Korollar Alg.2.2.28). Die über A ganzen Elemente von $Q(A)$ sind damit genau die Elemente von A. Insbesondere ist eine rationale Zahl genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn sie eine ganze Zahl ist.

Beispiel 2.1.14 (Ganzheit über einem Körper)**.** Sei K ein Körper und A eine K-Algebra. Ein Element $a \in A$ ist genau dann ganz über K, wenn es algebraich über K ist (Definition Alg.3.1.17). Insbesondere ist eine Körpererweiterung $K \subset L$ genau dann ganz, wenn sie algebraisch ist.

Notation 2.1.15. Sei B eine A-Algebra und $T \subset B$ eine Teilmenge. Man schreibt dann $A[T] \subset B$ für die von T erzeugte A-Unteralgebra von B, d.h., den kleinsten Unterring von B, der T sowie das Bild von $A \to B$ enthält. Sie ist genau das Bild des A-Algebrenhomomorphismus

$$A[X_t \mid t \in T] \to B, \quad X_t \mapsto t.$$

Wenn $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, schreibt man auch $A[t_1, \dots, t_n] \subset B$ für diese Unteralgebra.

Satz 2.1.16 (Charakterisierung ganzer Elemente)**.** *Sei A ein Ring, sei B eine A-Algebra und sei $b \in B$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *b ist ganz uber A.*

(ii) *Die A-Algebra $A[b]$ ist endlich.*

(iii) *Es gibt eine endliche A-Unteralgebra $B' \subset B$, die b enthält.*

Beweis. *Zu* (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $p \in A[X]$ ein monisches Polynom mit $p(b) = 0$. Die surjektive Abbildung $A[X] \twoheadrightarrow A[b]$, $X \mapsto b$, induziert dann eine surjektive Abbildung

$$A[X]/(p) \twoheadrightarrow A[b].$$

Nach Beispiel 2.1.9(iii) ist der A-Modul $A[X]/(p)$ endlich erzeugt. Also ist auch der A-Modul $A[b]$ endlich erzeugt, d.h., die A-Algebra $A[b]$ ist endlich.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii). Die Unteralgebra $B' = A[s]$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $h \colon A^n \twoheadrightarrow B'$ eine surjektive A-lineare Abbildung. Die Multiplikation mit b definiert eine A-lineare Abbildung $\bar{f} \colon B' \to B'$. Da A^n projektiv ist, gibt es eine A-lineare Abbildung $f \colon A^n \to A^n$ mit $h \circ f = \bar{f} \circ h$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (Satz LA.9.1.11(i)) gibt es ein monisches Polynom $p \in A[T]$ mit $p(f) = 0$, nämlich das charakteristische Polynom χ_f. Es gilt dann $p(\bar{f})(h(x)) = h(p(f)(x)) = 0$ für alle $x \in A^n$, so dass $p(\bar{f}) = 0$. Insbesondere ist $p(b) = p(\bar{f})(1) = 0$. $\square$

Korollar 2.1.17. *Sei A ein Ring.*

(i) *Sei B eine A-Algebra und seien $b_1, \dots, b_n \in B$ ganze Elemente über A. Dann ist die A-Algebra $A[b_1, \dots, b_n]$ endlich.*

(ii) *Eine A-Algebra ist genau dann endlich, wenn sie ganz und endlich erzeugt ist.*

Beweis. *Zu* (i). Jedes b_i ist ganz über A und insbesondere über $A[b_1, \dots, b_{i-1}]$. Nach Satz 2.1.16 ist jede Erweiterung $A[b_1, \dots, b_{i-1}] \subset A[b_1, \dots, b_i]$ endlich. Nach Proposition 2.1.10(i) ist damit $A \to A[b_1, \dots, b_n]$ endlich.

Zu (ii). Ist B endlich über A, so ist jedes Element $b \in B$ ganz über A nach der Implikation (iii) $\Rightarrow$ (i) aus Satz 2.1.16, d.h., B ist eine ganze A-Algebra. Sie ist auch endlich erzeugt nach Bemerkung 2.1.8. Sei umgekehrt B ganz und endlich erzeugt über A. Dann gibt es Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ mit $B = A[b_1, \dots, b_n]$. Nach (i) ist dann $A \to B$ endlich. $\square$

Proposition 2.1.18 (Transitivität der Ganzheit)**.** *Seien $\varphi \colon A \to B$ und $\psi \colon B \to C$ Ringhomomorphismen und sei $c \in C$.*

(i) *Ist φ ganz und ist c ganz über B, so ist c ganz über A. Insbesondere: Sind φ und ψ ganz, so ist $\psi \circ \varphi$ ganz.*

(ii) *Ist c ganz über A, so ist c ganz über B. Insbesondere: Ist $\psi \circ \varphi$ ganz, so ist ψ ganz.*

Beweis. Zu (i). Nach Definition ist c Nullstelle eines monischen Polynoms

$$X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0 \in B[X].$$

Insbesondere ist c ganz über der Unteralgebra $B' = A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ von B. Nach Satz 2.1.16 ist $B'[c]$ eine endliche B'-Algebra. Da jedes b_i ganz über A ist, ist B' eine endliche A-Algebra nach Korollar 2.1.17(i). Nach Proposition 2.1.10(i) ist dann $B'[c]$ eine endliche A-Algebra. Nach Satz 2.1.16 ist c ganz über A.

Zu (ii). Es gibt ein monisches Polynom $p \in A[X]$ mit $p(c) = 0$. Das Bild q von p in $B[X]$ ist wieder monisch und erfüllt $q(c) = 0$. Also ist c ganz über B. □

Proposition 2.1.19 (Ganzheit und Skalarerweiterung)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus und sei C eine A-Algebra. Dann ist der induzierte Ringhomomorphismus*

$$\varphi_C = \varphi \otimes \mathrm{id}_C\colon C \cong A \otimes_A C \to B \otimes_A C$$

ganz.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Quadrat von Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & C \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_C} \\ B & \xrightarrow{\psi_B} & B \otimes_A C, \end{array}$$

wobei $\varphi_C(c) = 1 \otimes c$ und $\psi_B(b) = b \otimes 1$. Man schreibt auch $\varphi\colon A[X] \to B[X]$ für die von φ induzierte Abbildung, und ebenso für φ_C, ψ und ψ_B. Die C-Algebra $B \otimes_A C$ wird von den Tensoren $\psi_B(b) = b \otimes 1$ mit $b \in B$ erzeugt. Nach Korollar 2.1.17 genügt es zu zeigen, dass jedes $\psi_B(b)$ ganz über C ist. Da b ganz über A ist, gibt es ein monisches Polynom $p \in A[X]$ mit $\varphi(p)(b) = 0$. Für das monische Polynom $\psi(p) \in C[X]$ gilt dann

$$\varphi_C(\psi(p))(\psi_B(b)) = \psi_B(\varphi(p))(\psi_B(b)) = \psi_B(\varphi(p)(b)) = \psi_B(0) = 0,$$

d.h., $\psi_B(b)$ ist eine Nullstelle von $\psi(p)$. □

Korollar 2.1.20. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus.*

(i) *Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist der induzierte Ringhomomorphismus $S^{-1}\varphi\colon S^{-1}A \to S^{-1}B$ ganz.*

(ii) *Seien $I \subset A$ und $J \subset B$ Ideale mit $I \subset \varphi^{-1}(J)$. Dann ist der induzierte Ringhomomorphismus $\bar{\varphi}\colon A/I \to B/J$ ganz.*

Beweis. Zu (i). Nach Proposition 1.3.21 ist dies der Sonderfall von Proposition 2.1.19 mit der A-Algebra $C = S^{-1}A$.

Zu (ii). Nach Proposition 2.1.18(i) ist die Komposition $A \to B \twoheadrightarrow B/J$ ganz. Die Aussage folgt nun aus Proposition 2.1.19, angewendet mit der A-Algebra A/I. Denn aus $\varphi(I) \subset J$ folgt $B/J \otimes_A A/I \cong B/(J + IB) = B/J$. □

2.1.3 Ganzer Abschluss und Normalität

Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung. Nach Korollar 2.1.17 ist die Teilmenge der über A ganzen Elemente von B ein Unterring von B, der A enthält. Das heißt: Summen, Differenzen und Produkte von über A ganzen Elementen sind wieder ganz über A (vgl. Korollar Alg.3.1.43).

Definition 2.1.21 (ganzer Abschluss)**.** Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung. Der *ganze Abschluss* von A in B ist der Unterring von B bestehend aus allen über A ganzen Elemente.

Definition 2.1.22 (ganz abgeschlossen, normal)**.**

- Ein Unterring $A \subset B$ heißt *ganz abgeschlossen in* B, wenn der ganze Abschluss von A in B gleich A ist. Ein Integritätsring A heißt *ganz abgeschlossen*, wenn A in seinem Quotientenkörper $Q(A)$ ganz abgeschlossen ist.
- Ein Ring A heißt *normal*, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ein ganz abgeschlossener Integritätsring ist.

Bemerkung 2.1.23. Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung und $\bar{A} \subset B$ der ganze Abschluss von A in B. Dann ist $\bar{A}$ ganz abgeschlossen in B, denn: Ist $b \in B$ ganz über $\bar{A}$, so ist b auch ganz über A nach Proposition 2.1.18(i), und somit gilt $b \in \bar{A}$.

Beispiel 2.1.24. Nach dem Lemma von Gauß sind faktorielle Ringe ganz abgeschlossen (siehe Beispiel 2.1.13). Insbesondere sind Hauptidealringe ganz abgeschlossen (Proposition LA.8.2.24). Zum Beispiel sind die folgenden Integritätsringe ganz abgeschlossen: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\omega]$ und $K[X_1, \ldots, X_n]$ mit einem Körper K.

Beispiel 2.1.25.

(i) Der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(i)$ ist genau $\mathbb{Z}[i]$, denn: Nach Beispiel 2.1.24 ist $\mathbb{Z}[i]$ ganz abgeschlossen in $\mathbb{Q}(i)$. Zudem ist $\mathbb{Z}[i]$ endlich über $\mathbb{Z}$ und damit ganz nach Satz 2.1.16. Man kann auch leicht explizite Ganzheitsgleichungen finden: Das Element $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ ist Nullstelle des monischen Polynoms

$$X^2 - 2aX + a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}[X].$$

(ii) Auf ähnliche Weise ist $\mathbb{Z}[\omega]$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

(iii) Jede Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2 hat die Form $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie ganze Zahl ist (d.h., $v_p(n) \leq 1$ für alle Primzahlen p). Ein grundlegender Satz der Zahlentheorie sagt, dass der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ im Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ gleich $\mathbb{Z}[\nu]$ ist, wobei

$$\nu = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{falls } n \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod 4, \\ \frac{1+\sqrt{n}}{2}, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Beispiele (i) und (ii) sind die Sonderfälle dieser Aussage mit $n = -1$ und $n = -3$.

Lemma 2.1.26. *Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ist A ganz abgeschlossen in B, so ist $S^{-1}A$ ganz abgeschlossen in $S^{-1}B$.*

Beweis. Nach Exaktheit der Lokalisierung ist $S^{-1}B$ eine Ringerweiterung von $S^{-1}A$. Sei $x \in S^{-1}B$ ganz über $S^{-1}A$. Es gibt dann ein $d \geq 1$ und Elemente $y_0, \ldots, y_{d-1} \in S^{-1}A$ mit $x^d + \sum_{i=0}^{d-1} y_i x^i = 0$. Für ein geeignetes $s \in S$ kann man schreiben $x = \frac{b}{s}$ und $y_i = \frac{a_i}{s}$ mit $b \in B$ und $a_i \in A$. Für das Element $c = b^d + \sum_{i=0}^{d-1} s^{d-i-1} a_i b^i \in A$ gilt dann $\frac{c}{s^d} = 0$ in $S^{-1}A$. Es gibt damit ein $t \in S$ mit $tc = 0$ in A. Dann gilt

$$0 = t^d c = (tb)^d + \sum_{i=0}^{d-1} t^{d-i} s^{d-i-1} a_i (tb)^i,$$

so dass tb ganz über A ist. Da A in B ganz abgeschlossen ist, gilt $tb \in A$. Daraus folgt $x = \frac{tb}{ts} \in S^{-1}A$. □

Proposition 2.1.27. *Sei A ein Integritätsring. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *A ist ganz abgeschlossen.*

(ii) *A ist normal, d.h., $A_{\mathfrak{p}}$ ist ganz abgeschlossen für alle Primideale $\mathfrak{p} \subset A$.*

(iii) *$A_{\mathfrak{m}}$ ist ganz abgeschlossen für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.*

Beweis. Ist A ganz abgeschlossen, so ist jede Lokalisierung $S^{-1}A$ mit $S \subset A \backslash \{0\}$ wieder ganz abgeschlossen nach Lemma 2.1.26. Dies zeigt (i) $\Rightarrow$ (ii), und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar. Betrachtet man A und die Lokalisierungen $A_{\mathfrak{m}}$ als Unterringe des Quotientenkörpers $Q(A)$, so gilt

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(A)} A_{\mathfrak{m}},$$

denn: Liegt $x \in Q(A)$ in diesem Durchschnitt, so ist das Ideal $I = \{a \in A | ax \in A\}$ in keinem maximalen Ideal enthalten, und damit ist es das Einsideal, d.h., $x \in A$. Sei nun $x \in Q(A)$ ganz über A. Nach (iii) liegt x in jedem $A_{\mathfrak{m}}$ und damit in A. Dies zeigt (iii) $\Rightarrow$ (i). □

2.2 Die Sätze von Cohen-Seidenberg

Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung. Die zwei Sätze von Cohen-Seidenberg beschreiben Eigenschaften der induzierten stetigen Abbildung $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$. Der *Going-Up-Satz* sagt im Wesentlichen, dass diese surjektiv und abgeschlossen ist (d.h., bildet abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen ab), und dass ihre Fasern nulldimensional sind. Falls B eine endliche A-Algebra ist, sind die Fasern sogar endlich und diskret. Der *Going-Down-Satz* sagt unter weiteren Voraussetzungen, dass $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ auch eine offene Abbildung ist.

Definition 2.2.1 (Spezialisierung, Generisierung)**.** Sei X ein topologischer Raum und seien $x, x' \in X$. Man sagt, dass x' eine *Spezialisierung* von x ist, und dass x eine *Generisierung* von x' ist, wenn $x' \in \overline{\{x\}}$. Man schreibt in diesem Fall $x \rightsquigarrow x'$ oder $x' \leftsquigarrow x$.

Bemerkung 2.2.2.

(i) Die Relation $\rightsquigarrow$ auf X ist reflexiv und transitiv. Sie ist genau dann antisymmetrisch (und damit eine partielle Ordnung), wenn X ein Kolmogoroff-Raum ist (z.B. ein nüchterner Raum). Ist außerdem $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist f automatisch monoton bezüglich $\rightsquigarrow$, das heißt, aus $x \rightsquigarrow x'$ folgt $f(x) \rightsquigarrow f(x')$.

(ii) In einem Hausdorff-Raum X gilt $x \rightsquigarrow y$ genau dann, wenn $x = y$. Die Relation $\rightsquigarrow$ ist also nicht interessant in Hausdorff-Räumen. Sie ist aber sehr nützlich in spektralen Räumen.

Beispiel 2.2.3. Sei $X = \{1, \ldots, n\}$ der topologische Raum mit den offenen Teilmengen $\{1, \ldots, m\}$, $0 \leq m \leq n$. Dann gilt $1 \rightsquigarrow 2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow n$.

Beispiel 2.2.4 (Spezialisierungen in Primspektren)**.** Sei R ein Ring. Im topologischen Raum $\mathrm{Spec}(R)$ gilt $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ (Proposition 1.4.28(iii)). Also ist $\mathfrak{q}$ genau dann eine Spezialisierung von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Anders gesagt stimmt die Relation $\rightsquigarrow$ auf $\mathrm{Spec}(R)$ mit der Inklusionsrelation $\subset$ überein.

Bemerkung 2.2.5. Sei X ein topologischer Raum, $T \subset X$ eine Teilmenge und $t \in T$.

(i) Ist T abgeschlossen in X, so liegt jede Spezialisierung von t in T.

(ii) Ist T offen in X, so liegt jede Generisierung von t in T.

Definition 2.2.6 (Going-Up- und Going-Down-Eigenschaften)**.** Seien X und Y topologische Räume und sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung.

- f hat die *Going-Up-Eigenschaft*, wenn folgendes gilt: Zu jeder Spezialisierung $x \rightsquigarrow x'$ in X und jedes $y \in Y$ mit $f(y) = x$ gibt es eine Spezialisierung $y \rightsquigarrow y'$ mit $f(y') = x'$.
- f hat die *Going-Down-Eigenschaft*, wenn folgendes gilt: Zu jeder Generisierung $x \leftsquigarrow x'$ in X und jedes $y \in Y$ mit $f(y) = x$ gibt es eine Generisierung $y \leftsquigarrow y'$ mit $f(y') = x'$.

Beispiel 2.2.7. Sei A ein Ring.

(i) Sei $I \subset A$ ein Ideal und sei $\varphi\colon A \twoheadrightarrow A/I$ die Quotientenabbildung. Aus Proposition 1.4.18 folgt unmittelbar, dass $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Up-Eigenschaft hat.

(ii) Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und sei $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ die kanonische Abbildung. Aus Proposition 1.4.19 folgt unmittelbar, dass $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Down-Eigenschaft hat.

Im Folgenden verallgemeinern wir beide Aussagen wie folgt: (i) gilt für alle *ganzen* Ringhomomorphismen φ (Satz 2.2.11) und (ii) gilt für alle *flachen* Ringhomomorphismen φ (Proposition 2.2.22).

Zur Erinnerung heißt eine stetige Abbildung $f\colon Y \to X$ *abgeschlossen*, wenn das Bild $f(A) \subset X$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset Y$ auch abgeschlossen ist. Sie heißt *offen*, wenn das Bild $f(A) \subset X$ jeder offenen Teilmenge $A \subset Y$ auch offen ist.

Proposition 2.2.8. *Sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung. Ist f abgeschlossen, so hat f die Going-Up-Eigenschaft.*

Beweis. Sei $x \rightsquigarrow x'$ in X und sei y ein Urbild von x. Da f abgeschlossen ist, ist $f(\overline{\{y\}})$ abgeschlossen. Aus $x \in f(\overline{\{y\}})$ folgt dann $x' \in \overline{\{x\}} \subset f(\overline{\{y\}})$. Es gibt damit ein $y' \in \overline{\{y\}}$ mit $f(y') = x'$. □

Für stetige Abbildungen der Form $\operatorname{Spec}(\varphi)$ kann man mehr sagen (das brauchen wir aber im Folgenden nicht):

Proposition 2.2.9. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus.*

(i) *Die Abbildung* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn sie die Going-Up-Eigenschaft hat.*

(ii) *Ist die Abbildung* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *offen, so hat sie die Going-Down-Eigenschaft.*

Beweis. Zu (i). Eine Implikation folgt bereits aus Proposition 2.2.8. Angenommen hat $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Up-Eigenschaft. Sei $I \subset B$ ein Ideal, das eine abgeschlossen Teilmenge $V(I) \subset \operatorname{Spec}(B)$ definiert. Sei $T \subset \operatorname{Spec}(A)$ das Bild von $V(I)$. Nach der Going-Up-Eigenschaft liegt dann jede Spezialisierung x' von einem Punkt $x \in T$ wieder in T. Sei nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Punkt im Abschluss von T. Nach Propositionen 1.4.18 und 1.4.19 kann man $\operatorname{Spec}((B/I)_{\mathfrak{p}})$ mit der Teilmenge von $\operatorname{Spec}(B)$ bestehend aus den Primidealen $\mathfrak{q}$ mit $I \subset \mathfrak{q}$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{p}$ identifizieren. Sein Bild unter $\operatorname{Spec}(\varphi)$ ist also genau die Menge der Generisierungen von $\mathfrak{p}$, die in T liegen. Es genügt also zu zeigen, dass diese Menge nicht leer ist, d.h., dass $(B/I)_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Die Gleichheit $1 = 0$ in $(B/I)_{\mathfrak{p}}$ würde die Gleichheit $1 = 0$ in $(B/I)[\frac{1}{f}]$ für ein geeignetes $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ implizieren, nach Definition der Lokalisierung. Man braucht also nur zu zeigen, dass für alle $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ gilt $(B/I)[\frac{1}{f}] \neq 0$. Für solches f ist $D(f)$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec}(A)$. Da $\mathfrak{p}$ im Abschluss von T liegt, gilt $D(f) \cap T \neq \varnothing$. Aber $D(f) \cap T$ ist genau das Bild von $\operatorname{Spec}((B/I)[\frac{1}{f}])$ in $\operatorname{Spec}(R)$, so dass $(B/I)[\frac{1}{f}] \neq 0$.

Zu (ii). Seien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ Primideale in A und sei $\mathfrak{q}'$ ein Primideal in B, das über $\mathfrak{p}'$ liegt (d.h., $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$). Wir suchen ein Primideal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Nach Propositionen

1.4.19 und 1.4.22 sind solche Primideale in Bijektion mit $\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{q}'} \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$. Man muss also zeigen, dass der Ring $B_{\mathfrak{q}'} \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \cong (B_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'})_{\mathfrak{p}}$ nicht null ist. Die Gleicheit $1 = 0$ in diesem Ring würde aber implizieren, nach Definition der Lokalisierung, dass $1 = 0$ ist im Ring $(B[\frac{1}{g}]/\mathfrak{p}B[\frac{1}{g}])_{\mathfrak{p}}$ für ein geeignetes $g \in B \setminus \mathfrak{q}'$. Es genügt also zu zeigen, dass für jedes $g \in B \setminus \mathfrak{q}'$ gilt $B[\frac{1}{g}] \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$. Das Spektrum von diesem Ring kann man wiederum mit der Faser von $\mathrm{Spec}(\varphi)|_{D(g)}$ über $\mathfrak{p}$ identifizieren. Die ist aber nicht leer, da $D(g)$ eine offene Umgebung von $\mathfrak{q}'$ in $\mathrm{Spec}(B)$ ist, und $\mathrm{Spec}(\varphi)$ offen ist. □

Bemerkung 2.2.10. Man kann zeigen, dass die Umkehrung in Proposition 2.2.9(ii) auch gilt, wenn φ endlich präsentierbar ist. Der Beweis ist aber ziemlich schwierig. Dabei ist die endliche Präsentierbarkeit notwending: Zum Beispiel hat die Abbildung $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ die Going-Down-Eigenschaft, aber sie ist nicht offen.

2.2.1 Der Going-Up-Satz

Wir beweisen den folgenden Satz am Ende dieses Abschnitts:

Satz 2.2.11 (Going-Up-Satz)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Dann hat* $\mathrm{Spec}(\varphi)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *die Going-Up-Eigenschaft. Das heißt: Sind $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ Primideale in A, und ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal in B mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}'$ in B mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$.*

Proposition 2.2.12. *Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung.*

(i) *Ist A ein Körper und ist B ein Integritätsring, so ist B ein Körper.*

(ii) *Ist B ein Körper, so ist A ein Körper.*

Beweis. Zu (i). Sei $b \in B \setminus \{0\}$, und sei $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in A[X]$ ein monisches Polynom vom minimalen Grad mit $p(b) = 0$. Dann gilt

$$-a_0 = bq(b), \quad \text{wobei } q = \frac{p - a_0}{X} \in A[X].$$

Nach Minimalität von n ist $q(b) \neq 0$, und damit $a_0 \neq 0$ (da B ein Integritätsring ist). Da A ein Körper ist, gilt $a_0 \in A^\times \subset B^\times$ und damit auch $b \in B^\times$.

Zu (ii). Sei $a \in A \setminus \{0\}$, und sei a^{-1} das Inverse von a in B. Da a^{-1} ganz über A ist, gibt es ein monisches Polynom $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in A[X]$ mit $p(a^{-1}) = 0$. Dann gilt

$$a^{-1} = a^{n-1}(a^{-1})^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{n-1-i} \in A,$$

so dass $a \in A^\times$. □

Korollar 2.2.13. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ und sei $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Das Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ is genau dann maximal, wenn $\mathfrak{p} \subset A$ maximal ist.*

Beweis. Nach Korollar 2.1.20(ii) ist der induzierte Ringhomomorphismus $\bar{\varphi}\colon A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$ zwischen Integritätsringen ganz, und er ist auch injektiv. Nach Proposition 2.2.12 ist $A/\mathfrak{p}$ genau dann ein Körper, wenn $B/\mathfrak{q}$ ein Körper ist. □

Lemma 2.2.14. *Sei K ein Körper und A eine endliche K-Algebra. Dann gilt $|\mathrm{Spec}(A)| \leq \dim_K(A) < \infty$.*

Beweis. Nach Korollar 2.2.13 sind alle Primideale in A maximal, da dies in K gilt. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ paarweise verschiedene maximale Ideale in A. Nach dem chinesischen Restsatz (Satz 1.1.13) gilt dann

$$A/(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n) \cong A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_n,$$

und daher $\dim_K(A) \geq n$. Daraus folgt $|\mathrm{Spec}(A)| \leq \dim_K(A)$. □

Satz 2.2.15 (topologische Eigenschaften ganzer Ringhomomorphismen)**.** *Sei* $\varphi\colon A \to B$ *ein ganzer Ringhomomorphismus und sei* $\operatorname{Spec}(\varphi)\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *die zugehörige stetige Abbildung.*

(i) $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *ist abgeschlossen.*

(ii) *Ist* φ *injektiv (d.h., eine ganze Ringerweiterung), so ist* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *surjektiv.*

(iii) *In jeder Faser von* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *sind alle Punkte abgeschlossen.*

(iv) *Ist* φ *endlich, so ist jede Faser von* $\operatorname{Spec}(\varphi)$ *endlich und diskret.*

Beweis. Zu (ii). Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Nach Korollar 2.1.20(i) ist der induzierte Ringhomomorphismus

$$\varphi_{\mathfrak{p}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{p}}$$

ganz (dabei ist $B_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung $\varphi(A\backslash\mathfrak{p})^{-1}B$). Wir betrachten das kommutative Quadrat

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) \arrow[r, "\operatorname{Spec}(\varphi_{\mathfrak{p}})"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \arrow[d, hook] \\ \operatorname{Spec}(B) \arrow[r, "\operatorname{Spec}(\varphi)"] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

(wobei die vertikale Pfeile injektiv sind nach Proposition 1.4.19). Der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ (Proposition 1.3.28), und die Abbildung $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ schickt $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ auf $\mathfrak{p}$ (Proposition 1.3.9). Es genügt also zu zeigen, dass $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ im Bild von $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}) \to \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ liegt. Nach Exaktheit der Lokalisierung (Proposition 1.3.18) ist $\varphi_{\mathfrak{p}}$ injektiv. Aus $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$ folgt also $B_{\mathfrak{p}} \neq 0$, so dass ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset B_{\mathfrak{p}}$ existiert (Proposition 1.1.21). Ihr Bild in $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ ist wieder ein maximales Ideal nach Korollar 2.2.13, also ist gleich $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, wie gewünscht.

Zu (i). Jede abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(B)$ hat die Form $V(J)$ für ein Ideal $J \subset B$. Sei $I = \varphi^{-1}(J) \subset A$ und sei $\bar{\varphi}\colon A/I \to B/J$ der induzierte Ringhomomorphismus. Es gibt ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(B/J) \arrow[r, "\operatorname{Spec}(\bar{\varphi})"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Spec}(A/I) \arrow[d, hook] \\ \operatorname{Spec}(B) \arrow[r, "\operatorname{Spec}(\varphi)"] & \operatorname{Spec} A, \end{tikzcd}$$

wobei die Bilder der vertikalen Pfeile gleich $V(J)$ und $V(I)$ sind (Proposition 1.4.18). Es genügt also zu zeigen, dass $\operatorname{Spec}(\bar{\varphi})$ surjektiv ist. Nach Definition von I und Korollar 2.1.20(ii) ist $\bar{\varphi}$ eine ganze Ringerweiterung. Die gewünschte Aussage folgt nun aus (ii).

Zu (iii). Nach Proposition 1.4.22 ist die Faser von $\operatorname{Spec}(\varphi)$ über dem Punkt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ homöomorph zu $\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}))$. Nach Proposition 2.1.19 ist $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ eine ganze $\kappa(\mathfrak{p})$-Algebra. Nach Korollar 2.2.13 sind alle Primideale in $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ maximal, d.h., alle Punkte im Primspektrum sind abgeschlossen.

Zu (iv). Nach Lemma 2.2.14 ist jede Faser endlich. Die Diskretheit folgt aus (iii), denn: Ein endlicher topologischer Raum, in dem alle Punkte abgeschlossen sind, ist diskret. □

Der Going-Up-Satz ist nun eine einfache Folgerung von Satz 2.2.15:

Beweis von Satz 2.2.11. Dies folgt aus Satz 2.2.15(i) mit Proposition 2.2.8. □

Beispiel 2.2.16. Wir betrachten die endliche Ringerweiterung $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$. Nach Satz 2.2.15(ii), Proposition 1.4.22 und Lemma 2.2.14 gibt es über jedem Primideal in $\mathbb{Z}$ mindestens ein und höchstens zwei Primideale in $\mathbb{Z}[i]$. Die kann man mit dem Zwei-Quadrate-Satz von Fermat explizit beschreiben. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich:

(i) Ist $p \equiv 3 \pmod 4$, so ist p prim in $\mathbb{Z}[i]$ und damit ist (p) das einzige Primideal über $p\mathbb{Z}$. Der Restklassenkörper $\mathbb{Z}[i]/(p)$ hat p^2 Elemente und ist damit zu $\mathbb{F}_{p^2}$ isomorph.

(ii) Ist $p \equiv 1 \pmod 4$, so ist $p = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, und $(a + bi)$ und $(a - bi)$ sind zwei verschiedene Primideale in $\mathbb{Z}[i]$ über $p\mathbb{Z}$. Beide Restklassenkörper sind zu $\mathbb{F}_p$ isomorph, und die Faser $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ ist zu $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ isomorph.

(iii) Es gilt $2 = (1+i)(1-i)$, aber $1+i$ und $1-i$ sind assoziiert. Damit ist $(1+i)$ das einzige Primideal in $\mathbb{Z}[i]$ über $2\mathbb{Z}$. Sein Restklassenkörper ist $\mathbb{F}_2$, aber die Faser $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_2$ ist die nicht-reduzierte $\mathbb{F}_2$-Algebra $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + 1) = \mathbb{F}_2[\varepsilon]$, wobei ε die Restklasse von $X + 1$ ist, für die gilt $\varepsilon^2 = 0$.

Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}$	(0)	(2)	(3)	(5)	(7)	(11)	(13)	$\cdots$
darüberliegende Primideale	(0)	$(1+i)$	(3)	$(1 \pm 2i)$	(7)	(11)	$(2 \pm 3i)$	
Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p})$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_3$	$\mathbb{F}_5$	$\mathbb{F}_7$	$\mathbb{F}_{11}$	$\mathbb{F}_{13}$	
Faser $\mathbb{Z}[i] \otimes_{\mathbb{Z}} \kappa(\mathfrak{p})$	$\mathbb{Q}(i)$	$\mathbb{F}_2[\varepsilon]$	$\mathbb{F}_9$	$\mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$	$\mathbb{F}_{49}$	$\mathbb{F}_{121}$	$\mathbb{F}_{13} \times \mathbb{F}_{13}$	

2.2.2 Der Going-Down-Satz

Der Going-Down-Satz ist die folgende Aussage. Im Vergleich zum Going-Up-Satz gibt es zusätzliche wesentliche Voraussetzungen, und der Beweis ist auch deutlich komplizierter.

Satz 2.2.17 (Going-Down-Satz)**.** *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsringen, wobei A normal ist. Dann hat die induzierte Abbildung* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *die Going-Down-Eigenschaft. Das heißt: Sind $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ Primideale in A, und ist $\mathfrak{q}'$ ein Primideal in B mit $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}'$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ in B mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.*

Lemma 2.2.18. *Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung und sei $I \subset A$ ein Ideal. Jedes $b \in IB$ erfüllt dann eine Ganzheitsgleichung der Form*

$$b^d + t_1 b^{d-1} + \cdots + t_d = 0 \quad \textit{mit} \quad t_k \in I^k.$$

Beweis. Man kann schreiben $b = \sum_{i=1}^n r_i b_i$ mit $r_i \in I$ und $b_i \in B$. Nach Korollar 2.1.17(i) ist $M = A[b_1, \ldots, b_n]$ eine endlich erzeugter A-Modul. Die Multiplikation mit b Abbildung $M \to M$ bildet dann M auf IM ab. Wählt man eine erzeugende Familie $(x_1, \ldots, x_d)$ von M, so finden wir eine $d \times d$-Matrix H mit Koeffizienten in I, so dass $bx_i = Hx_i$ für alle i. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt dann $\chi_H(b) = 0$ (vgl. den Beweis von Satz 2.1.16), und das charakteristische Polynom $\chi_H \in A[X]$ hat die gewünschte Form. □

Lemma 2.2.19. *Sei $A \subset B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsringen mit Quotientenkörpern $K \subset L$ und sei $I \subset A$ ein Ideal. Sei $b \in IB \subset L$ und sei $m_b \in K[X]$ das Minimalpolynom von b über K. Ist A normal, so liegen alle Koeffizienten von m_b (außer dem Leitkoeffizient 1) im Ideal $\sqrt{I}$.*

Beweis. Da b ganz über A ist, ist es insbesondere algebraisch über K, so dass $m_b \in K[X]$ ein monisches irreduzibles Polynom ist (Satz Alg.3.1.24(i)). Nach Lemma 2.2.18 erfüllt b eine Ganzheitsgleichung über A der Form

$$b^d + t_1 b^{d-1} + \cdots + t_d = 0 \quad \text{mit} \quad t_1, \ldots, t_d \in I. \tag{2.2.20}$$

Sei L' eine Körpererweiterung von L, in der m_b in seine Linearfaktoren zerfällt: $m_b = \prod_{j=1}^n (X - c_j)$ mit $c_1 = b$. Sei B' der ganze Abschluss von A (oder äquivalent von B) in L'. Da m_b irreduzibel ist, ist es auch das Minimalpolynom von c_j, d.h., b und c_j sind algebraisch konjugiert. Nach dem Konjugationsprinzip (Proposition Alg.3.1.31) gibt es einen Isomorphismus von K-Algebren $K(b) \xrightarrow{\sim} K(c_j)$, der b auf c_j abbildet. Damit erfüllt auch jedes c_j dieselbe Ganzheitsgleichung (2.2.20). Insbesondere ist c_j ganz über A, d.h., $c_j \in B'$, und es gilt $c_j^d \in IB'$ und daher $c_j \in \sqrt{IB'}$. Die Koeffizienten von m_b außer dem Leitkoeffizient liegen damit im Ideal $\sqrt{IB'}$. Sie liegen auch in K nach Definition, und damit in A, da A in K ganz abgeschlossen ist. Zum schließen brauchen wir noch die Inklusion

$$\sqrt{IB'} \cap A \subset \sqrt{I}.$$

Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, das I enthält. Nach Korollar 1.1.28 genügt es zu zeigen, dass $\sqrt{IB'} \cap A \subset \mathfrak{p}$. Da B' eine ganze Erweiterung von A ist, gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B'$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ (Satz 2.2.15(ii)). Dann gilt $IB' \subset \mathfrak{q}$ und damit $\sqrt{IB'} \subset \mathfrak{q}$ und $\sqrt{IB'} \cap A \subset \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, wie gewünscht. □

Beweis von Satz 2.2.17. Wie im Beweis von Proposition 2.2.9(ii) genügt es zu zeigen, dass $(B_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'})_{\mathfrak{p}} \neq 0$, d.h., dass $A \setminus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} = \varnothing$ (Bemerkung 1.3.5(iii)). Angenommen, es gebe ein x in diesem Durchschnitt, d.h., $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ und $x = \frac{b}{s} \in \mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'}$ mit $b \in \mathfrak{p}B$ und $s \in B \setminus \mathfrak{q}'$. Nach Lemma 2.2.19 hat das Minimalpolynom m_b von b über $K = Q(A)$ die Form $m_b = X^d + t_1X^{d-1} + \cdots + t_d$ mit $t_i \in \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. In $L = Q(B)$ gilt $s = x^{-1}b$. Aus $x \in A$ folgt $x^{-1} \in K$, so dass

$$m_s = X^d + u_1X^{d-1} + \cdots + u_d \quad \text{mit} \quad u_i = x^{-i}t_i.$$

Aus Lemma 2.2.19 folgt dann $u_i \in \sqrt{A} = A$. Wegen $x \in A \setminus \mathfrak{p}$ und $x^iu_i = t_i \in \mathfrak{p}$ gilt sogar $u_i \in \mathfrak{p}$. Aus $m_s(s) = 0$ folgt nun $s^d \in \mathfrak{p}B \subset \mathfrak{p}'B \subset \mathfrak{q}'$ und damit $s \in \mathfrak{q}'$. Dies steht aber im Widerspruch zu $s \in B \setminus \mathfrak{q}'$. □

Beispiel 2.2.21. Der Going-Down-Satz gilt nicht, ohne die Voraussetzung, dass B ein Integritätsring ist. Sei zum Beispiel K ein Körper, $A = K[X,Y]/(XY)$ und $B = K[X] \times K[Y]$. Der Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$, $[p] \mapsto (p(X,0), p(0,Y))$, ist endlich und injektiv: Er identifiziert A mit dem Unterring von B bestehend aus Paaren (q,r) mit $q(0) = r(0)$. Wir betrachten die Primideale $\mathfrak{p} = (X) \subset \mathfrak{p}' = (X,Y)$ in A und das Primideal $\mathfrak{q}' = K[X] \times (Y)$ in B, das über $\mathfrak{p}'$ liegt. Dann gibt es kein Primideal $\mathfrak{q}$ in B mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

Die Going-Down-Eigenschaft gilt auch für flache Ringhomomorphismen:

Proposition 2.2.22. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann hat* $\mathrm{Spec}(\varphi)$ *die Going-Down-Eigenschaft.*

Beweis. Seien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ Primideale in A und sei $\mathfrak{q}' \subset B$ ein Primideal mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}'$. Wie im Beweis von Proposition 2.2.9(ii) genügt es zu zeigen, dass $B_{\mathfrak{q}'} \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$. Sei φ' die Komposition $A \xrightarrow{\varphi} B \to B_{\mathfrak{q}'}$. Da beide φ und $B \to B_{\mathfrak{q}'}$ flach sind (Korollar 1.3.23), ist auch φ' flach (nach Proposition 1.2.18). Die kanonische Abbildung $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ ist injektiv, und nach Flachheit bleibt sie injektiv nach Skalarerweiterung längs φ'. Es genügt also zu zeigen, dass der Ring $B_{\mathfrak{q}'} \otimes_A A/\mathfrak{p} \cong B_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'}$ nicht null ist. Dieser Ring hat aber den Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{q}')$ als weiteren Quotient (denn $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}'} \subset \mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}'}$). □

Bemerkung 2.2.23 (Going-Down und Offenheit)**.** Sei $A \subset B$ eine ganze Ringerweiterung wie im Going-Down-Satz 2.2.17. Ist B eine endlich präsentierbare A-Algebra (und insbesondere eine endliche A-Algebra nach Korollar 2.1.17(ii)), so folgt aus Bemerkung 2.2.10, dass die induzierte stetige Abbildung $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ offen ist.

Aus Proposition 2.2.22 folgt ebenso, dass $\mathrm{Spec}(\varphi)$ offen ist, wenn φ ein endlich präsentierbarer flacher Ringhomomorphismus ist.

2.3 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Sei K ein Körper und sei $E \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge. Dann ist $(f = 0)_{f \in E}$ ein System von Polynomgleichungen in n Variablen. Der Hilbertsche Nullstellensatz ist eine allgemeine Aussage über die Existenz von Lösungen solcher Systeme. Seine schwache Form besagt, dass eine Lösung stets existiert in einer endlichen Körpererweiterung von K, sofern die Gleichung $1 = 0$ keine algebraische Kombination der gegebenen Gleichungen ist, d.h., sofern $1 \notin (E)$. Es gibt mehrere verschiedene Beweise von dem Nullstellensatz; wir werden ihn auf den Going-Up-Satz zurückführen

2.3.1 Verschwindungsorte und Verschwindungsideale

Definition 2.3.1 (Verschwindungsort, Verschwindungsideal, Koordinatenring)**.** Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$.

- Sei $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge. Der *Verschwindungsort* oder die *Nullstellenmenge* von E in K^n ist die Teilmenge
$$V_K(E) = \{x \in K^n \mid \text{für alle } f \in E \text{ gilt } f(x) = 0\} \subset K^n.$$
- Sei $X \subset K^n$ eine Teilmenge. Das *Verschwindungsideal* von X ist das Ideal
$$I_K(X) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid \text{für alle } x \in X \text{ gilt } f(x) = 0\} \subset K[X_1, \dots, X_n].$$
Der Restklassenring $K[X_1, \cdots, X_n]/I_K(X)$ heißt *Koordinatenring* von X.

Bemerkung 2.3.2 (Verschwindungsorte als Mengen von Algebrenhomomorphismen)**.** Sei $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge, sei $A = K[X_1, \dots, X_n]/(E)$ und sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung. Nach den universellen Eigenschaften der Polynomalgebra (Proposition LA.8.1.45) und des Restklassenringes (Proposition Alg.2.1.46) gibt es eine Bijektion
$$\begin{aligned}\{K\text{-Algebrenhomomorphismen } A \to L\} &\xrightarrow{\sim} V_L(E),\\ f &\mapsto (f([X_1]), \dots, f([X_n])).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.3 (Koordinatenring als Ring von Funktionen)**.** Der Koordinatenring von $X \subset K^n$ kann man mit dem Ring der K-wertigen Polynomfunktionen auf X identifizieren: $I_K(X)$ ist genau der Kern des Ringhomomorphismus
$$K[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Abb}(X, K), \quad p \mapsto (x \mapsto p(x)),$$
so dass $K[X_1, \dots, X_n]/I_K(X)$ zu seinem Bild isomorph ist.

Zur Erinnerung sind die Verschwindungsorte $V_K(E)$ die abgeschlossenen Teilmengen von K^n bezüglich der Zariski-Topologie (Bemerkung 1.4.8). Im Folgenden schreiben wir $\overline{X}$ für den Abschluss einer Teilmenge $X \subset K^n$ bezüglich der Zariski-Topologie.

Proposition 2.3.4 (Eigenschaften von Verschwindungsorten und Verschwindungsidealen)**.** *Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Seien $E, F \subset K[X_1, \dots, X_n]$ und $X, Y \subset K^n$. Dann gilt:*

(i) *V_K und I_K sind inlusionsumkehrend: Aus $E \subset F$ folgt $V_K(E) \supset V_K(F)$, und aus $X \subset Y$ folgt $I_K(X) \supset I_K(Y)$.*

(ii) $E \subset I_K(X) \;\Leftrightarrow\; X \subset V_K(E)$.

(iii) *$V_K(E)$ ist Zariski-abgeschlossen und $I_K(X)$ ist ein Radikalideal.*

(iv) *Es gilt $\sqrt{(E)} \subset I_K(V_K(E))$ und $\overline{X} = V_K(I_K(X))$.*

(v) *Es gilt $V_K(E) = V_K(\sqrt{(E)})$ und $I_K(X) = I_K(\overline{X})$.*

Beweis. Aussagen (i) und (ii) folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Zu (iii). $V_K(E)$ ist Zariski-abgeschlossen nach Definition. Es ist klar, dass $I_K(X)$ ein Ideal ist, und es ist ein Radikalideal, weil K ein reduzierter Ring ist: Aus $f(x)^m = 0$ folgt $f(x) = 0$.

Zu (iv). Nach (ii) gilt $E \subset I_K(V_K(E))$, und die Inklusion $\sqrt{(E)} \subset I_K(V_K(E))$ folgt daraus, dass $I_K(V_K(E))$ ein Radikalideal ist. Nach (ii) gilt ebenso $X \subset V_K(I_K(X))$, und die Inklusion $\bar{X} \subset V_K(I_K(X))$ folgt daraus, dass $V_K(I_K(X))$ abgeschlossen ist. Zur anderen Inklusion sei $V_K(F)$ eine abgeschlossene Teilmenge von K^n mit $X \subset V_K(F)$. Nach (ii) gilt dann $F \subset I_K(X)$ und aus (i) folgt $V_K(I_K(X)) \subset V_K(F)$. Damit ist $V_K(I_K(X))$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die X enthält.

Zu (v). Eine Inklusion folgt jeweils aus (i), und die andere folgt aus (iv) und (ii). □

Nach Proposition 2.3.4(v) sind beide Dreiecke im folgenden Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\{\text{Teilmengen von } K[X_1,\dots,X_n]\} \arrow[d, two heads, "E\mapsto\sqrt{(E)}"'] \arrow[dr, two heads, "V_K"] & \\
\{\text{Radikalideale in } K[X_1,\dots,X_n]\} \arrow[r, two heads, shift left, "V_K"] & \{\text{abgeschlossene Teilmengen von } K^n\} \arrow[l, hook', shift left, "I_K"] \\
& \{\text{Teilmengen von } K^n\}. \arrow[u, two heads, "X\mapsto\overline{X}"'] \arrow[ul, "I_K"]
\end{tikzcd}$$

Nach Proposition 2.3.4(iv) gilt weiter $V_K \circ I_K = \mathrm{id}$ auf der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von K^n. Der *starke Nullstellensatz* ist die Aussage, dass auch $I_K \circ V_K = \mathrm{id}$ auf der Menge der Radikalideale in $K[X_1, \dots, X_n]$, wenn K algebraisch abgeschlossen ist (siehe Satz 2.3.12).

Bemerkung 2.3.5. Ist K nicht algebraisch abgeschlossen und ist $n \geq 1$, so sind Radikalideale in $K[X_1, \dots, X_n]$ nicht durch ihre Verschwindungsorte bestimmt. Sei zum Beispiel $p \in K[X_1] \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 2. Dann haben die Radikalideale (p) und (1) denselben Verschwindungsort, nämlich $\varnothing$. Insbesondere ist (p) kein Verschwindungsideal.

2.3.2 Noethersche Normalisierung

Der Noethersche Normalisierungssatz besagt, dass jede endlich erzeugte Algebra über einem Körper eine endliche Erweiterung eines Polynomringes ist.

Definition 2.3.6 (algebraisch unabhängig)**.** Sei R ein Ring und A eine R-Algebra. Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ von Elementen von A heißt *algebraisch unabhängig* uber R, wenn der induzierte R-Algebrenhomomorphismus

$$R[X_i \mid i \in I] \to A, \quad X_i \mapsto a_i,$$

injektiv ist, das heißt: Ist $f(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}) = 0$ für ein Polynom $f \in R[X_1, \dots, X_n]$ und paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$, so folgt bereits $f = 0$.

Bemerkung 2.3.7.

(i) Jede Teilfamilie einer algebraisch unabhängigen Familie ist wieder algebraisch unabhängig.

(ii) Sei K ein Körper und A eine K-Algebra. Dann ist die leere Familie in A stets algebraisch unabhängig, außer wenn $A = 0$.

Satz 2.3.8 (Noetherscher Normalisierungssatz)**.** *Sei K ein Körper und sei $A \neq 0$ eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und einen endlichen injektiven K-Algebrenhomomorphismus $K[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow A$.*

Beweis. Wir suchen eine algebraisch unabhängige Familie $(x_1, \dots, x_d)$ in A, so dass A endlich über der Unteralgebra $K[x_1, \dots, x_d]$ ist. Sei $\{r_1, \dots, r_n\}$ ein Erzeugendensystem der K-Algebra A. Wir gehen durch Induktion über n vor. Falls die Familie $(r_1, \dots, r_n)$ bereits algebraisch unabhängig ist (z.B. wenn $n = 0$), gibt es nichts zu zeigen. Sei also $n \geq 1$ und sei $f \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ ein Polynom mit $f(r_1, \dots, r_n) = 0$. Nach der Induktionsvoraussetzung genügt es Elemente $s_2, \dots, s_n \in R$ zu finden, so dass R eine endliche $K[s_2, \dots, s_n]$-Algebra ist. Dazu betrachten wir natürliche Zahlen $e_2, \dots, e_n \in \mathbb{N}$ und setzen wir

$$s_i = r_i - r_1^{e_i} \quad \text{für alle } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Für das Polynom $g = f(X, s_2 + X^{e_2}, \dots, s_n + X^{e_n}) \in K[s_2, \dots, s_n][X]$ gilt dann

$$g(r_1) = f(r_1, \dots, r_n) = 0.$$

Behauptung. Man kann die Exponenten e_i so auswählen, dass der Leitkoeffizient von g im Körper K liegt (und insbesondere eine Einheit ist).

Dies impliziert, dass r_1 ein ganzes Element über den Ring $K[s_1, \dots, s_n]$ ist, so dass $A = K[s_2, \dots, s_n][r_1]$ eine endliche $K[s_2, \dots, s_n]$-Algebra ist (Satz 2.1.16). Es bleibt also die Behauptung zu beweisen.

Das Polynom f lässt sich wie folgt schreiben:

$$f = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I} a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n},$$

mit einer endlichen Teilmenge $I \subset \mathbb{N}^n$ und Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_n} \in K \setminus \{0\}$. Dementsprechend gilt

$$g = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I} a_{i_1 \dots i_n} X^{i_1} (s_2 + X^{e_2})^{i_2} \dots (s_n + X^{e_n})^{i_n}.$$

Das Leitmonom jedes Summanden ist dann $a_{i_1 \dots i_n} X^{i_1 + e_2 i_2 + \dots + e_n i_n}$, und insbesondere liegt sein Koeffizient in K. Es genügt also zu vereinbaren, dass die Abbildung

$$\nu \colon I \to \mathbb{N}, \quad (i_1, \dots, i_n) \mapsto i_1 + e_2 i_2 + \dots + e_n i_n,$$

genau ein Maximum $m \in I$ besitzt: Dann ist der Leitkoeffizient von g gleich $a_m \in K$. Hierzu kann man $e_i = b^{i-1}$ setzen, wobei b größer als jede natürliche Zahl aus I ist. Dann ist jedes n-Tupel $(i_1, \dots, i_n) \in I$ die Darstellung der Zahl $i_1 + e_2 i_2 + \dots + e_n i_n$ im b-adischen Zahlensystem, so dass die Abbildung ν injektiv ist. $\square$

Beispiel 2.3.9. Sei $A = K[X, Y, Z]/(f)$, wobei $f = X^3Y^2 - X^2Z^4 + XYZ$. Der Beweis vom Normalisierungssatz zeigt, dass A endlich über $K[s, t]$ ist, wobei $s = Y - X^5$ und $t = Z - X^{25}$. Mit der Dimensionstheorie (siehe Abschnitt 3.2) kann man zeigen, dass s und t automatisch algebraisch unabhängig sind: Die Zahl d im Normalisierungssatz ist die Krull-Dimension von A (nach Proposition 3.2.14), die gleich 2 ist (nach Propositionen 3.2.28 und 3.2.40).

2.3.3 Nullstellensätze

Wir beweisen zunächst den *schwachen Nullstellensatz*:

Satz 2.3.10 (Hilbertscher Nullstellensatz, schwache Form)**.** *Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge. Ist $(E) \neq (1)$, so gibt es eine endliche Körpererweiterung $L \mid K$ mit $V_L(E) \neq \varnothing$. Insbesondere gilt $V_K(E) \neq \varnothing$, wenn K algebraisch abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $A = K[X_1, \dots, X_n]/(E)$. Aus $(E) \neq (1)$ folgt $A \neq 0$. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und einen injektiven endlichen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi \colon K[X_1, \dots, X_d] \hookrightarrow A$. Das Ideal $\mathfrak{n} = (X_1, \dots, X_d) \subset K[X_1, \dots, X_d]$ ist dann maximal (da $K[X_1, \dots, X_d]/\mathfrak{n} \cong K$). Nach Satz 2.2.15(ii) und Korollar 2.2.13 gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$. Der Körper $L = A/\mathfrak{m}$ ist dann eine endliche Körpererweiterung von $K[X_1, \dots, X_d]/\mathfrak{n} \cong K$. Damit erhalten wir einen K-Algebrenhomomorphismus $A \to L$, d.h., ein Punkt in $V_L(E)$ (Bemerkung 2.3.2). $\square$

Korollar 2.3.11 (Lemma von Zariski)**.** *Sei K ein Körper und sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung. Ist L endlich erzeugt als K-Algebra, so ist $L \mid K$ eine endliche Körpererweiterung.*

Beweis. Nach Satz 2.3.10 gibt es eine endliche Körpererweiterung $M \mid K$ und einen K-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon L \to M$. Da L und M Körper sind, ist φ injektiv und damit gilt $[L : K] \leq [M : K] < \infty$. $\square$

Satz 2.3.12 (Hilbertscher Nullstellensatz, starke Form)**.** *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $E \subset K[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge. Dann gilt*

$$I_K(V_K(E)) = \sqrt{(E)}.$$

Konkret gesagt: Ist $f(x) = 0$ für alle x im Verschwindungsort von E, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m \in (E)$.

Beweis. Sei $f \in I_K(V_K(E))$ und sei $E_f = E \cup \{1 - X_{n+1}f\} \subset K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$. Für einen Punkt $x \in V_K(E_f) \subset K^{n+1}$ gilt $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ und $x_{n+1}f(x_1, \dots, x_n) = 1$, was nicht möglich ist. Also ist $V_K(E_f) = \varnothing$. Nach Satz 2.3.10 muss damit (E_f) das Einsideal sein, d.h., es gibt Polynome $g_1, \dots, g_r \in E$ und $h_0, \dots, h_r \in K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}]$ mit

$$1 = h_0(1 - X_{n+1}f) + h_1 g_1 + \cdots + h_r g_r.$$

Wir wenden nun den Einsetzungshomomorphismus

$$\varepsilon\colon K[X_1, \dots, X_n, X_{n+1}] \to K[X_1, \dots, X_n][\tfrac{1}{f}], \quad X_{n+1} \mapsto \tfrac{1}{f},$$

darauf an. Es ergibt sich

$$1 = \varepsilon(h_1)g_1 + \cdots + \varepsilon(h_r)g_r \in K[X_1, \dots, X_n][\tfrac{1}{f}],$$

und insbesondere $1 \in (E)[\frac{1}{f}]$. Nach Definition der Lokalisierung gibt es dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m \in (E)$, d.h., $f \in \sqrt{(E)}$. $\square$

Bemerkung 2.3.13. Sei K algebraisch abgeschlossen. Nach Satz 2.3.12 und Proposition 2.3.4 bilden V_K und I_K zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen zwischen Radikalidealen in $K[X_1, \dots, X_n]$ und Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von K^n.

Korollar 2.3.14 (maximale Ideale im Koordinatenring)**.** *Sei K algebraisch abgeschlossen, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $V \subset K^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sim} \operatorname{mSpec}(K[X_1, \dots, X_n]/I_K(V)), \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto ([X_1 - a_1], \dots, [X_n - a_n]). \end{aligned}$$

Insbesondere ist die folgende Abbildung bijektiv:

$$K^n \xrightarrow{\sim} \operatorname{mSpec}(K[X_1, \dots, X_n]), \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Beweis. Da die Bijektion (V_K, I_K) zwischen Radikalidealen in $K[X_1, \dots, X_n]$ und abgeschlossenen Teilmengen von K^n inklusionsumkehrend ist, schränkt sie sich zu einer Bijektion zwischen maximalen Idealen, die $I_K(V)$ enthalten, und einelementigen Teilmengen von V ein (die einelementigen Teilmengen sind genau die minimalen nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von K^n). Das ist die gewünschte Bijektion. $\square$

Bemerkung 2.3.15. Man kann die schwache Form des Nullstellensatzes aus der starken Form zurückbekommen. Sei $E \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $(E) \neq (1)$, sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]/(E)$ und sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Nach Satz 2.3.12 ist $I_{\bar{K}}(V_{\bar{K}}(E)) = \sqrt{(E)} \neq (1)$, so dass $V_{\bar{K}}(E)$ nicht leer ist, d.h., es gibt einen K-Algebrenhomomorphismus $A \to \bar{K}$. Die Körpererweiterung $\bar{K} \mid K$ ist üblicherweise nicht endlich, aber sie ist algebraisch und damit die Vereinigung ihrer Zwischenkörper L mit $[L : K] < \infty$. Da A endlich erzeugt ist, liegt das Bild von jedem K-Algebrenhomomorphismus $A \to \bar{K}$ in einem solchen L, so dass $V_L(E) \neq \varnothing$.

Kapitel 3

Noethersche Ringe und Dimension

3.1 Noethersche und artinsche Ringe

3.1.1 Noethersche Ringe und Moduln

Definition 3.1.1 (noetherscher Modul, noetherscher Ring)**.** Sei R ein Ring.

- Ein R-Modul M heißt *noethersch*, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.
- Der Ring R selbst heißt *noethersch*, wenn er als R-Modul noethersch ist, d.h., wenn jedes Ideal $I \subset R$ endlich erzeugt ist.

Bemerkung 3.1.2. Da Hauptideale nach Definition endlich erzeugt sind, ist jeder Hauptidealring noethersch.

Proposition 3.1.3 (Charakterisierung noetherscher Moduln)**.** *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die folgenenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *M ist noethersch, d.h., jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

(ii) *Jede aufsteigende Folge von Untermoduln*

$$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset M$$

ist stationär, d.h., es gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $N_n = N_m$ für alle $m \geq n$.

(iii) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M hat ein maximales Element bezüglich Inklusion.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$ und sei $E \subset N$ ein endliches Erzeugendensystem. Es gibt dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $E \subset N_n$, so dass $N_n = N_{n+1} = \cdots$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $\mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge von Untermoduln von M ohne maximales Element, d.h.: Für jedes $N \in \mathfrak{X}$ gibt es ein $N' \in \mathfrak{X}$ mit $N \subsetneqq N'$. Damit kann man induktiv eine streng aufsteigende Folge $N_0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq \cdots$ von Elementen von $\mathfrak{X}$ bilden. Insbesondere ist (ii) nicht erfüllt.

Zu (iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $N \subset M$ ein Untermodul und sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller endlich erzeugten Untermoduln von N. Nach (iii) hat $\mathfrak{X}$ ein maximales Element $N' \subset N$. Für jedes $x \in N$ ist dann $N' + \mathrm{Span}_R\{x\}$ ein endlich erzeugter Untermodul von N. Aus der Maximalität von N folgt $N' + \mathrm{Span}_R\{x\} = N'$, und insbesondere $x \in N'$. Also ist $N = N'$. $\square$

Beispiel 3.1.4.

(i) Sei R ein Ring mit $1 \neq 0$. Dann ist der Polynomring $R[X_1, X_2, \dots]$ nicht noethersch, wegen der Folge von Idealen

$$(X_1) \subsetneqq (X_1, X_2) \subsetneqq (X_1, X_2, X_3) \subsetneqq \cdots.$$

(ii) Sei X ein normaler topologischer Raum, in dem eine streng absteigende Folge $Y_0 \supsetneqq Y_1 \supsetneqq \cdots$ von abgeschlossenen Teilmengen existiert (zum Beispiel: $X = [0,1]$ und $Y_n = \{0\} \cup \{\frac{1}{m} \mid m > n\}$). Dann ist der Ring $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen reellen Funktionen auf X nicht noethersch. Denn $I_n = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f|_{Y_n} = 0\}$ ist ein Ideal in $C(X, \mathbb{R})$, und nach dem Lemma von Urysohn gilt $I_n \subsetneqq I_{n+1}$.

Proposition 3.1.5 (Vererbungseigenschaften noetherscher Ringe)**.** *Sei R ein noetherscher Ring.*

(i) *Ist $I \subset R$ ein Ideal, so ist der Restklassenring R/I noethersch.*

(ii) *Ist $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so ist die Lokalisierung $S^{-1}R$ noethersch.*

Beweis. *Zu* (i). Sei $q\colon R \to R/I$ die Quotientenabbildung und sei $J \subset R/I$ ein Ideal. Dann ist $q^{-1}(J)$ ein Ideal in R. Ist E ein endliches Erzeugendensystem von $q^{-1}(J)$, so ist $q(E)$ ein endliches Erzeugendensystem von $q(q^{-1}(J)) = J$.

Zu (ii). Sei $j\colon R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung und sei $I \subset S^{-1}R$ ein Ideal. Dann ist $j^{-1}(I)$ ein Ideal in R, und es gilt $S^{-1}j^{-1}(I) = I$ (siehe den Beweis von Proposition 1.3.9). Ist E ein endliches Erzeugendensystem von $j^{-1}(I)$, so ist $j(E)$ ein endliches Erzeugendensystem vom Ideal $S^{-1}j^{-1}(I) = I$. □

Proposition 3.1.6. *Sei R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Sei $N \subset M$ ein Untermodul und sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M. Wir zeigen durch Induktion über n, dass N endlich erzeugt ist. Falls $n = 0$ ist $M = \{0\}$ und damit auch $N = \{0\}$. Falls $n \geq 1$ betrachten wir $M' = \mathrm{Span}_R\{x_1, \dots, x_{n-1}\} \subset M$ und die Quotientenabbildung $\pi\colon M \to M/M'$. Die Zeilen im folgenden Diagramm sind kurze exakte Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M/M' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \cap M' \arrow[r] \arrow[u, hook] & N \arrow[r, "\pi|_N"] \arrow[u, hook] & \pi(N) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 0.
\end{tikzcd}$$

Der Modul M/M' wird von $x_n + M'$ erzeugt, und es gibt insbesondere eine surjektive R-lineare Abbildung $f\colon R \to M/M'$. Jeder Untermodul U von M/M' ist dann das Bild des Ideals $f^{-1}(U)$ unter f. Da R noethersch ist, ist $f^{-1}(U)$ und damit auch U endlich erzeugt. Insbesondere ist $\pi(N)$ endlich erzeugt. Auf der anderen Seite ist $N \cap M'$ endlich erzeugt nach Induktionsvoraussetzung. Nach Proposition 1.2.36(i) ist damit N endlich erzeugt. □

Korollar 3.1.7. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist jeder endlich erzeugte R-Modul endlich präsentierbar.*

Beweis. Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Es gibt dann ein $m \in \mathbb{N}$ und eine surjektive lineare Abbildung $f\colon R^m \twoheadrightarrow M$. Nach Proposition 3.1.6 ist $\ker f$ wieder endlich erzeugt. Nach Proposition 1.2.36(iii) ist damit M endlich präsentierbar. □

Definition 3.1.8 (noetherscher Raum)**.** Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn folgendes gilt: Jede absteigende Folge $Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$ von abgeschlossenen Teilmengen von X ist stationär, d.h., es gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $Y_n = Y_m$ für alle $m \geq n$.

Bemerkung 3.1.9. Nach Propositionen 3.1.3(ii) und 1.4.7 ist das Primspektrum eines noetherschen Ringes ein noetherscher Raum. Die Umkehrung gilt aber nicht.

Proposition 3.1.10. *Sei X ein noetherscher Raum. Dann hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition. Sei X ein topologischer Raum mit unendlich vielen irreduziblen Komponenten.

Behauptung. Es gibt eine abgeschlossen Teilmenge $A \subsetneqq X$, die unendlich viele irreduzible Komponenten hat.

Mit dieser Behauptung kann man induktiv eine streng absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen bilden, so dass X nicht noethersch ist. Da X nicht irreduzibel und nicht leer ist, gibt es abgeschlossene Teilmengen $A, B \subsetneqq X$ mit $X = A \cup B$. Nach Proposition 1.4.34 ist A die Vereinigung seiner irreduziblen Komponenten, und jede solche Komponente ist in einer irreduziblen Komponente von X enthalten. Hat A endlich viele irreduzible Komponenten, so gibt es folglich endlich viele ireduzible Komponenten von X, deren Vereinigung A enthält. Da X keine Vereinigung endlich vieler irreduzibler Komponenten ist, muss A oder B unendlich viele irreduzible Komponenten haben, wie behauptet. □

Korollar 3.1.11. *Sei R ein noetherscher Ring. Dann hat R nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Die minimalen Primideale in R entsprechen den irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec}(R)$ (Proposition 1.4.35). Nach Bemerkung 3.1.9 ist $\operatorname{Spec}(R)$ ein noetherscher Raum, und nach Proposition 3.1.10 hat er nur endlich viele irreduzible Komponenten. □

Bemerkung 3.1.12. Sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ ein Ideal und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Es gibt dann nur endlich viele minimale Elemente unter den Primidealen $\mathfrak{p}$ in R, die I enthalten und von S disjunkt sind. Denn man kann solche Primideale mit den Primidealen von $S^{-1}(R/I)$ identifizieren, und der letztere Ring ist noethersch nach Proposition 3.1.5.

3.1.2 Der Hilbertsche Basissatz

Satz 3.1.13 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring. Dann ist der Polynomring $R[X]$ noethersch.*

Beweis. Sei $I \subset R[X]$ ein Ideal. Man muss zeigen, dass I endlich erzeugt ist. Sei $I_0 \subset R$ die Menge der Leitkoeffizienten der Elemente von I (wobei wir 0 als Leitkoeffizient vom Nullpolynom betrachten). Dann ist I_0 ein Ideal in R: Die Summe der Leitkoeffizienten von $f, g \in I$ mit $\deg(f) \leq \deg(g)$ ist entweder gleich Null oder gleich dem Leitkoeffizient von $X^{\deg g - \deg f} f + g$. Da R noethersch ist, gibt es $r_1, \ldots, r_n \in R \setminus \{0\}$ mit $I_0 = (r_1, \ldots, r_n)$. Ohne Einschränkung ist $n \geq 1$ (sonst ist $I = 0$ und gibt es nichts zu zeigen). Wir wählen für jedes i ein Polynom $f_i \in I$ mit Leitkoeffizient r_i aus und setzen $J = (f_1, \ldots, f_n) \subset I$. Sei $d = \max\{\deg(f_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ und sei $I_{<d} = (I \cap R[X]_{<d}) \subset I$, wobei $R[X]_{<d} \subset R[X]$ der R-Untermodul bestehend aus den Polynomen vom Grad $< d$ ist. Da R noethersch ist und $R[X]_{<d} \cong R^d$ ein endlich erzeugter R-Modul ist, ist der R-Modul $I \cap R[X]_{<d}$ endlich erzeugt (Proposition 3.1.6). Damit ist der davon erzeugte $R[X]$-Untermodul $I_{<d}$ endlich erzeugt.

Wir zeigen nun, dass $I = I_{<d} + J$ ist. Dies impliziert den Satz, denn beide $I_{<d}$ und J endlich erzeugte Ideale sind. Die Inklusion $I_{<d} + J \subset I$ gilt nach Konstruktion. Sei $f \in I$. Wir zeigen $f \in I_{<d} + J$ durch Induktion über $\deg(f)$. Falls $\deg(f) < d$, so liegt f bereits in $I_{<d}$. Sei also $\deg(f) \geq d$ und sei $r \in I_0$ der Leitkoeffizient von f. Es gibt $a_1, \ldots, a_n \in R$ mit $r = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$. Setzt man

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{\deg f - \deg f_i} f_i \in J,$$

so ist g vom Grad $\deg(f)$ mit Leitkoeffizient r. Damit gilt $\deg(f-g) < \deg(f)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $f-g \in I_{<d}+J$ und somit auch $f = (f-g)+g \in I_{<d}+J$. $\square$

Korollar 3.1.14. *Sei R ein noetherscher Ring und A eine endlich erzeugte R-Algebra. Dann ist A ein noetherscher Ring und eine endlich präsentierbare R-Algebra.*

Beweis. Nach Definition gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Ideal $I \subset R[X_1, \dots, X_n]$ mit $A \cong R[X_1, \dots, X_n]/I$. Nach Satz 3.1.13 und Induktion ist $R[X_1, \dots, X_n]$ noethersch. Damit ist A endlich präsentierbar (da I endlich erzeugt ist) und noethersch (nach Proposition 3.1.5(i)). $\square$

Bemerkung 3.1.15. Mit einem ähnlichen Argument kann man zeigen, dass der Ring der Potenzreihen $R[[X_1, \dots, X_n]]$ auch noethersch ist, wenn R noethersch ist.

3.1.3 Artinsche Ringe

Zur folgenden Definition siehe auch LA.8.3.2.

Definition 3.1.16 (Länge eines Moduls)**.** Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die *Länge* von M ist

$$\ell_R(M) = \sup\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt eine Kette von Untermoduln} \\ M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n \text{ von } M \end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Beispiel 3.1.17.

(i) Nach Definition gilt $\ell_R(M) = 0$ genau dann, wenn $M = \{0\}$.

(ii) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Aus Proposition LA.3.3.35 folgt leicht, dass $\ell_K(V) = \dim_K(V)$ gilt.

(iii) Ist R ein Integritätsring, der kein Körper ist, so gilt $\ell_R(R) = \infty$. Denn ist $r \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$, so ist
$$(r^n) \subsetneqq (r^{n-1}) \subsetneqq \cdots \subsetneqq (r) \subsetneqq R.$$
eine Kette von Idealen der Länge n.

(iv) Ist R ein Hauptidealring und ist $r \in R \setminus \{0\}$, so gilt
$$\ell_R(R/(r)) = \text{Anzahl der Primfaktoren von } r$$
(Proposition LA.8.3.17(iv)).

Bemerkung 3.1.18. Sei $R \twoheadrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphimus und sei M ein S-Modul. Dann gibt es keinen Unterschied zwischen S-Untermoduln und R-Untermoduln von M, so dass $\ell_S(M) = \ell_R(M)$.

Proposition 3.1.19 (Additivität der Länge)**.** *Sei R ein Ring und sei*

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann gilt

$$\ell_R(N) = \ell_R(M) + \ell_R(P).$$

Beweis. Siehe Proposition LA.8.3.17(i,ii). $\square$

Definition 3.1.20 (artinscher Ring)**.** Ein Ring R heißt *artinsch*, wenn $\ell_R(R) < \infty$.

Proposition 3.1.21. *Sei R ein artinscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt $\ell_R(M) < \infty$.*

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist trivial. Sei $n \geq 1$ und sei $M' = \mathrm{Span}_R\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\ell_R(M') < \infty$. Da M/M' zyklisch ist, gibt es ein Ideal $I \subset R$ mit $R/I \cong M/M'$. Aus Proposition 3.1.19 folgt

$$\ell_R(M) = \ell_R(M') + \ell_R(M/M') \leq \ell_R(M') + \ell_R(R) < \infty. \qquad \square$$

Proposition 3.1.22 (Charakterisierung artinscher Ringe)**.** *Sei R ein Ring. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *R ist artinsch, d.h., $\ell_R(R) < \infty$.*

(ii) *R ist noethersch und* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{mSpec}(R)$.

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Definition der Länge ist jede aufsteigende Folge von Idealen in R stationär, so dass R noethersch ist (Proposition 3.1.3). Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Nach Proposition 3.1.19 gilt $\ell_{R/\mathfrak{p}}(R/\mathfrak{p}) < \infty$. Nach Beispiel 3.1.17(iii) muss der Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ ein Körper sein, d.h., $\mathfrak{p}$ ist ein maximales Ideal.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). In einem solchen Ring R ist das Nilradikal gleich dem Jacobson-Radikal (nach Proposition 1.1.27). Da die maximalen Ideale in R auch die minimalen Primideale sind, hat R nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ nach Korollar 3.1.11. Es gilt dann

$$\mathfrak{m}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{m}_n \subset \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = J(R) = \sqrt{0}.$$

Da R noethersch ist, ist das Ideal $\sqrt{0}$ endlich erzeugt: $\sqrt{0} = (r_1, \ldots, r_m)$. Da jedes r_i nilpotent ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass jedes Produkt von k Elementen von $\sqrt{0}$ gleich Null ist (z.B. $k = m \cdot \max\{k_1, \ldots, k_m\}$, wobei $r_i^{k_i} = 0$). Insbesondere ist $\mathfrak{m}_1^k \ldots \mathfrak{m}_n^k = 0$. Wir betrachten nun die folgende Kette von nk Idealen:

$$R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1^k \supset \mathfrak{m}_1^k\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1^k\mathfrak{m}_2^k \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1^k \ldots \mathfrak{m}_n^k = 0.$$

Jeder Quotient zweier aufeinander folgender Moduln in dieser Kette ist ein endlich erzeugter $R/\mathfrak{m}_i$-Modul und damit hat endliche Länge. Aus Proposition 3.1.19 folgt dann induktiv, dass $\ell_R(R) < \infty$. $\square$

3.2 Dimensionstheorie

3.2.1 Die Krull-Dimension eines topologischen Raums

Es gibt viele verschiedene Begriffe der *Dimension* in der Topologie. Die Krull-Dimension ist ein solcher Begriff, der für spektrale Räume vernünftig ist.

Definition 3.2.1 (Krull-Dimension, Höhe)**.** Sei X ein topologischer Raum.

- Die *Krull-Dimension* von X ist

$$\dim(X) = \sup\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{es gibt eine Kette abgeschlossener irreduzibler} \\ \text{Teilmengen } X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_n \subset X\end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\}.$$

- Die *Höhe* (oder *Kodimension*) von einem Punkt $x \in X$ ist

$$\mathrm{ht}_X(x) = \sup\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c}\text{es gibt eine Kette abgeschlossener irreduzibler} \\ \text{Teilmengen } x \in X_0 \subsetneqq X_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_n \subset X\end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Bemerkung 3.2.2.

(i) Es gilt $\dim(X) = \sup_{x \in X} \mathrm{ht}_X(x)$.

(ii) Es gilt $\dim(X) = -\infty$ genau dann, wenn $X = \varnothing$.

(iii) Es gilt $\mathrm{ht}_X(x) = 0$ genau dann, wenn $\overline{\{x\}}$ eine irreduzible Komponente von X ist.

(iv) Ist X ein Hausdorff-Raum, so sind die abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von X genau die einelementigen Teilmengen. Damit gilt

$$\dim(X) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } X = \varnothing, \\ 0, & \text{falls } X \neq \varnothing. \end{cases}$$

(v) Ist X nüchtern (Definition 1.4.25), so gibt es nach Definition einen Isomorphismus von partiell geordneten Mengen

$$(\{\text{abgeschlossene irreduzible Teilmengen von } X\}, \subset) \cong (X, \leftsquigarrow).$$

Die Krull-Dimension von X ist damit auch das Supremum der Länge der Ketten von Generisierungen $x_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow x_n$ mit $x_{i-1} \neq x_i$.

Beispiel 3.2.3. Sei $n \geq 1$ und $X = \{1, \ldots, n\}$ der topologische Raum mit den offenen Teilmengen $\{1, \ldots, m\}$, $0 \leq m \leq n$. Dann gilt $\dim(X) = n - 1$ und $\mathrm{ht}_X(m) = m - 1$.

Proposition 3.2.4 (Eigenschaften der Krull-Dimension)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

(i) *Für jeden Unterraum $Y \subset X$ gilt* $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(ii) *Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, so gilt* $\dim(X) = \sup_{i\in I} \dim(U_i)$.

(iii) *Ist X nüchtern und ist $(Z_i)_{i\in I}$ eine abgeschlossene Überdeckung von X, so gilt* $\dim(X) = \sup_{i\in I} \dim(Z_i)$.

(iv) *Es gilt* $\dim(X) = \sup_{Y\in\mathcal{K}(X)} \dim(Y)$*, wobei $\mathcal{K}(X)$ die Menge der irreduziblen Komponenten von X ist.*

Beweis. Zu (i). Nach Definition der Topologie auf Y gilt $A = \bar{A} \cap Y$ für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset Y$, wobei $\bar{A}$ der Abschluss von A in X ist. Nach Lemma 1.4.33 ist $\bar{A}$ irreduzibel, wenn A irreduzibel ist. Ist nun $Y_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq Y_n$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen von Y, so ist $\bar{Y}_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \bar{Y}_n$ eine solche Kette in X. Damit ist $n \leq \dim(X)$ und daher $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

Zu (ii). Die Ungleichung $\geq$ folgt aus (i). Sei $X_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_n$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen von X. Es gibt einen Index $i \in I$ mit $X_0 \cap U_i \neq \varnothing$. Aus $X_r = (X_r \setminus U_i) \cup (\overline{X_r \cap U_i})$ und der Irreduzibilität von X_r folgt $X_r = \overline{X_r \cap U_i}$. Nach Lemma 1.4.33 ist insbesondere $X_r \cap U_i$ irreduzibel, und aus $X_{r-1} \neq X_r$ folgt $X_{r-1} \cap U_i \neq X_r \cap U_i$. Also ist $\dim(U_i) \geq n$, was die Ungleichung $\leq$ liefert.

Zu (iii). Die Ungleichung $\geq$ folgt aus (i). Sei $X_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq X_n$ eine Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen von X. Da X nüchtern ist, gibt es einen Punkt x mit $\overline{\{x\}} = X_n$, und damit einen Index $i \in I$ mit $X_n \subset Z_i$. Es gilt dann $\dim(Z_i) \geq n$, was die Ungleichung $\leq$ liefert.

Zu (iv). Dies folgt unmittelbar daraus, dass jede abgeschlossene irreduzible Teilmenge von X in einer irreduziblen Komponente enthalten ist (Proposition 1.4.34(ii)). □

Proposition 3.2.5 (Dimensionsformeln für stetige Abbildungen)**.** *Sei $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung zwischen nüchternen Räumen.*

(i) *Seien $y \in Y$, $x = f(y)$ und $Y_x = f^{-1}(\{x\})$ die Faser über x. Hat f die Going-Down-Eigenschaft, so gilt*

$$\mathrm{ht}_Y(y) \geq \mathrm{ht}_X(x) + \mathrm{ht}_{Y_x}(y).$$

(ii) *Hat f die Going-Up-Eigenschaft, so gilt*

$$\dim(Y) \geq \dim(f(Y)).$$

(iii) *Haben alle Fasern von f die Krull-Dimension ≤ 0, so gilt*

$$\dim(Y) \leq \dim(X).$$

Beweis. Zu (i). Seien $x = x_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow x_r$ und $y = y_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow y_s$ Ketten von Generisierungen in X und in Y_x. Nach der Going-Down-Eigenschaft kann man die erste Kette zu einer Kette $y_s \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow y_{s+r}$ hochheben. Damit erhalten wir eine Kette von Generisierungen von y der Länge $r + s$, so dass $\mathrm{ht}_Y(y) \geq r + s$.

Zu (ii). Sei $x_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow x_r$ eine Kette von Generisierungen in $f(X)$ und sei $y_r \in Y$ ein Urbild von x_r unter f. Nach der Going-Up-Eigenschaft kann man diese Kette zu einer Kette $y_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow y_r$ hochheben, so dass $\dim(Y) \geq s$.

Zu (iii). Sei $y_0 \leftsquigarrow \cdots \leftsquigarrow y_r$ eine Kette der Länge r in Y. Aus $y_{i-1} \neq y_i$ folgt $f(y_{i-1}) \neq f(y_i)$, da es keine Generisierungen in den Fasern von f besteht. Damit ist $\dim(X) \geq r$. □

3.2.2 Die Krull-Dimension eines Ringes

Wir wenden nun die Definition 3.2.1 auf Primspektren an:

Definition 3.2.6 (Krull-Dimension, Höhe)**.** Sei R ein Ring.

- Die *Krull-Dimension* $\dim(R)$ von R ist die Krull-Dimension von $\mathrm{Spec}(R)$.
- Sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Die *Höhe* $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ in R ist die Höhe von $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Spec}(R)$.

Bemerkung 3.2.7. Nach Proposition 1.4.28(iii) gibt es eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen Primidealen in R und abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$. Damit gilt

$$\dim(R) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt eine Kette von Primidealen} \\ \mathfrak{p}_0 \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_n \text{ in } R \end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{\pm\infty\},$$

$$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = \sup \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{es gibt eine Kette von Primidealen} \\ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_n \text{ in } R \end{array} \right\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Bemerkung 3.2.8.

(i) Nach Proposition 1.3.9 ist $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = \dim(R_\mathfrak{p})$.

(ii) Es gilt

$$\dim(R) = \sup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = \sup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(R)} \mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}).$$

Die erste Gleichheit gilt nach Definition und die zweite nach Proposition 1.1.21.

(iii) Es gilt $\dim(R) = -\infty$ genau dann, wenn $R = 0$.

(iv) Es gilt $\dim(R) \leq 0$ genau dann, wenn $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{mSpec}(R)$.

(v) Es gilt $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist.

(vi) Ist R lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so gilt $\dim(R) = \mathrm{ht}_R(\mathfrak{m})$.

Beispiel 3.2.9 (nulldimensionale Ringe)**.**

(i) Nach Proposition 3.1.22 ist ein Ring genau dann artinsch, wenn er noethersch der Dimension ≤ 0 ist.

(ii) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Nach Satz 2.2.15(iii) und Proposition 1.4.22 haben alle Fasern $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ von φ die Dimension ≤ 0.

Proposition 3.2.10. *Sei R ein Ring.*

(i) *Ist $I \subset R$ ein Ideal, so gilt* $\dim(R/I) \leq \dim(R)$.

(ii) *Ist $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so gilt* $\dim(S^{-1}R) \leq \dim(R)$.

(iii) *Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so gilt* $\dim(R_{\mathfrak{p}}) + \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R)$.

Beweis. Aussagen (i) und (ii) sind Sonderfälle der Proposition 3.2.4(i), da beide $\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ und $\operatorname{Spec}(R/I)$ zu Unterräumen von $\operatorname{Spec}(R)$ homöomorph sind (Propositionen 1.4.18 und 1.4.19). Die letzte Aussage folgt daraus, dass man eine Kette von Generisierung von $\mathfrak{p}$ der Länge r mit einer Kette von Spezialisierungen von $\mathfrak{p}$ der Länge s zusammensetzen kann, um eine Kette der Länge $r+s$ zu erhalten. □

Proposition 3.2.11. *Sei R ein Hauptidealring. Dann gilt*

$$\dim(R) = \begin{cases} 0, & \textit{wenn } R \textit{ ein Körper ist,} \\ 1, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Ein Körper hat genau ein Primideal und hat damit Dimension 0. Ist R kein Körper, so gibt es mindestens ein Primelement in R (nach Primfaktorzerlegung), und die Primideale in R sind genau das Nullideal (0) und die Ideale (p) mit p prim, die maximal sind (siehe Bemerkung Alg.2.2.8(ii)). Damit ist $(0) \subsetneqq (p)$ eine Kette maximaler Länge. □

Proposition 3.2.12. *Sei R ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\dim(R[X_1, \dots, X_n]) \geq \dim(R) + n.$$

Beweis. Es genügt den Fall $n = 1$ zu betrachten. Sei $\varepsilon_0\colon R[T] \to R$, $f \mapsto f(0)$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R, so sind beide $\mathfrak{p}[X]$ und $\varepsilon_0^{-1}(\mathfrak{p})$ Primideale in $R[X]$ (mit Restklassenringen $(R/\mathfrak{p})[X]$ und $R/\mathfrak{p}$). Für jede Kette $\mathfrak{p}_0 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_r$ von Primidealen in R ist dann

$$\varepsilon_0^{-1}(\mathfrak{p}_0) \supsetneqq \mathfrak{p}_0[X] \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_r[X]$$

eine Kette von Primidealen in $R[X]$, so dass $\dim(R[X]) \geq r+1$ und damit $\dim(R[X]) \geq \dim(R) + 1$. □

Bemerkung 3.2.13. Wir zeigen später, dass die Gleichheit in Proposition 3.2.12 gilt, wenn R noethersch ist (Proposition 3.2.28). Es gibt aber Beispiele von Ringen R mit $\dim(R[X]) > \dim(R) + 1$.

Proposition 3.2.14 (ganze Ringhomomorphismen und Krull-Dimension)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus. Dann ist* $\dim(B) \leq \dim(A)$, *und die Gleichheit gilt, wenn φ injektiv ist.*

Beweis. Nach Satz 2.2.15 hat die Abbildung $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Up-Eigenschaft, und ihre Fasern haben die Krull-Dimension ≤ 0. Zudem ist $\operatorname{Spec}(\varphi)$ surjektiv, wenn φ injektiv ist. Die Aussage folgt nun aus Proposition 3.2.5(ii,iii). □

Beispiel 3.2.15. Nach Proposition 3.2.14 ist die Zahl d im Noetherschen Normalisierungssatz 2.3.8 genau die Krull-Dimension der endlich erzeugten K-Algebra A. Insbesondere ist d durch A eindeutig bestimmt.

Proposition 3.2.16 (flache Ringhomomorphismen und Krull-Dimension)**.** *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus, sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, sei $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ und sei $\mathfrak{q}' \subset B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ das $\mathfrak{q}$ entsprechende Primideal nach Proposition 1.4.22. Dann gilt*

$$\operatorname{ht}_B(\mathfrak{q}) \geq \operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}) + \operatorname{ht}_{B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})}(\mathfrak{q}').$$

Beweis. Dies folgt aus Propositionen 3.2.5(i) und 1.4.22, da $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Down-Eigenschaft hat (Proposition 2.2.22). □

3.2.3 Die Sätze von Krull

In diesem Abschnitt beweisen wir den wichtigsten Grundsatz der Dimensionstheorie, den *Hauptidealsatz* von Krull, und sein Korollar, den *Höhensatz.* Diese Sätze zeigen, dass die Höhe eines Primideals $\mathfrak{p}$ in einem noetherschen Ring mit der Größe eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{p}$ zusammenhängt. Dies impliziert, dass die Krull-Dimension von noetherschen Ringen besonders gute Eigenschaften hat und oft berechenbar ist. Wir werden zum Beispiel die Krull-Dimension von affinen Räumen (Proposition 3.2.28) und Hyperflächen (Proposition 3.2.40) über Körpern berechnen.

Wir beweisen zunächst ein paar nützliche allgemeine Aussagen über Primideale.

Proposition 3.2.17 (minimale Primideale und Nullteiler)**.** *Sei R ein Ring.*

(i) *Jedes Element eines minimalen Primideals in R ist ein Nullteiler.*

(ii) *Ist R reduziert, so liegt jeder Nullteiler in einem minimalen Primideal.*

Beweis. Zu (i). Sei $\mathfrak{p}$ minimal und sei $a \in \mathfrak{p}$. Die Lokalisierung $R_\mathfrak{p}$ hat dann genau ein Primideal, nämlich $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Nach Proposition 1.1.27 ist $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ das Nilradikal von R. Damit ist $\frac{a}{1} \in R_\mathfrak{p}$ nilpotent, d.h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $f \notin \mathfrak{p}$ mit $fa^n = 0$.

Zu (ii). Sei a ein Nullteiler in R, d.h., es gibt $b \in R \setminus \{0\}$ mit $ab = 0$. Da R reduziert ist, ist b nicht nilpotent. Nach Proposition 1.1.27 gibt es ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ in R, so dass $b \notin \mathfrak{p}$. Aus $ab \in \mathfrak{p}$ und $b \notin \mathfrak{p}$ folgt $a \in \mathfrak{p}$. □

Beispiel 3.2.18. Sei $R \neq 0$. Im Restklassenring $R[X,Y]/(X^2, XY)$ ist Y ein Nullteiler, der in keinem minimalen Primideal enthalten ist. Denn (X) ist das einzige minimale Primideal.

Proposition 3.2.19 (Primvermeidungslemma)**.** *Sei R ein Ring, $E \subset \operatorname{Spec}(R)$ eine endliche Teilmenge und $U \subset \operatorname{Spec}(R)$ eine offene Umgebung von E. Dann gibt es ein $f \in R$ mit $E \subset D(f) \subset U$.*

Beweis. Sei $E = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ und sei $U = D(I)$. Nach Bemerkung 2.2.5(ii) kann man annehmen, dass es keine Generisierungen zwischen den $\mathfrak{p}_i$ besteht, d.h., dass $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ für alle $i \neq j$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Im Fall $n = 0$ kann man $f = 0$ nehmen. Sei also $n \geq 1$ und sei $f \in R$ mit $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}\} \subset D(f) \subset U$. Falls $\mathfrak{p}_n \in D(f)$ sind wir durch. Wir nehmen also an, dass $f \in \mathfrak{p}_n$. Nach Voraussetzung gilt $I \not\subset \mathfrak{p}_i$ für alle i. Aus Proposition 1.1.22 folgt $I\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{n-1} \not\subset \mathfrak{p}_n$. Sei also $g \in I\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{n-1} \setminus \mathfrak{p}_n$. Das Element $f+g \in I$ leistet dann das Gewünschte: Es ist $f+g \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i, denn $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}$ enthalten g und nicht f, und $\mathfrak{p}_n$ enthält f und nicht g. □

Die nächste Proposition ist die einfachere Hälfte des Zusammenhangs zwischen der Höhe und der Größe eines Erzeugendensystems:

Proposition 3.2.20. *Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal mit $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) = r$. Dann gibt es Elemente $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{p}$, so dass $\mathfrak{p}$ ein minimales $(x_1, \dots, x_r)$ enthaltendes Primideal ist.*

Beweis. Wir gehen durch Induktion über r vor. Der Fall $r = 0$ ist klar. Sei $r \geq 1$ und seien $\mathfrak{q}_1$, $\dots$, $\mathfrak{q}_n$ die minimalen Primideale von R (Korollar 3.1.11). Wegen $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) \geq 1$ gilt $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}_i$ für alle i, und somit $\mathfrak{p} \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ nach Proposition 3.2.19. Sei $x_1 \in \mathfrak{p} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$. Im Restklassenring $R/(x_1)$ hat dann $\mathfrak{p}/(x_1)$ die Höhe $\leq r-1$ (Korollar 1.1.19). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r \in \mathfrak{p}/(x_1)$, so dass $\mathfrak{p}/(x_1)$ ein minimales $(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$ enthaltendes Primideal ist. Sind $x_2, \dots, x_r$ beliebige Urbilder von $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$, so haben $x_1, \dots, x_r$ die gewünschte Eigenschaft. □

Der Krullsche Höhensatz ist eine teilweise Umkehrung der Proposition 3.2.20. Dabei ist der Sonderfall $r = 1$ der entscheidende Punkt:

Satz 3.2.21 (Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring, sei $a \in R$ und sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein minimales a enthaltendes Primideal. Dann gilt $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq 1$, und die Gleichheit gilt genau dann, wenn a kein Nullteiler in $R/\sqrt{0}$ ist.*

Beweis. Da $\mathrm{Spec}(R) \cong \mathrm{Spec}(R/\sqrt{0})$ kann man ohne Einschränkung annehmen, dass R reduziert ist. Ist $a \in R$ ein Nullteiler, so folgt aus Proposition 3.2.17(ii), dass $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = 0$. Sei also $a \in R$ kein Nullteiler. Dann ist $\mathfrak{p}$ nicht minimal nach Proposition 3.2.17(i), so dass $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \geq 1$. Zur umgekehrten Ungleichung muss man zeigen, dass für jede Kette von Primidealen $\mathfrak{p} \supsetneqq \mathfrak{q} \supset \mathfrak{r}$ gilt $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$. Indem man R durch $(R/\mathfrak{r})_\mathfrak{p}$ ersetzt, kann man annehmen, dass R ein lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist. Man muss dann zeigen, dass $\mathfrak{q} = 0$.

Sei $j\colon R \hookrightarrow R_\mathfrak{q}$ die kanonische Abbildung und sei $\mathfrak{q}^{(n)} = j^{-1}(\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q})$. Der Restklassenring $R/(a)$ hat genau ein Primideal und ist somit artinsch (Proposition 3.1.22). Die absteigende Kette $(\mathfrak{q}^{(n)} + (a))/(a)$ von Idealen in $R/(a)$ ist dann stationär. Insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(n+1)} + (a)$.

Behauptung. Es gilt $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)} + a\mathfrak{q}^{(n)}$.

Die Inklusion $\supset$ ist klar. Sei $x \in \mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(n+1)} + (a)$, so dass $x = y + ar$ mit $y \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $r \in R$. Aus $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subset \mathfrak{q}^{(n)}$ folgt $ar \in \mathfrak{q}^{(n)}$, und nach Definition von $\mathfrak{q}^{(n)}$ gibt es ein $s \in R \setminus \mathfrak{q}$ mit $sar \in \mathfrak{q}^n$. Da $a \notin \mathfrak{q}$ (nach Minimalität von $\mathfrak{p}$ als a enthaltendem Primideal), ist auch $sa \notin \mathfrak{q}$ und damit ist $r \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Dies zeigt, dass $x \in \mathfrak{q}^{(n+1)} + a\mathfrak{q}^{(n)}$.

Nach der Behauptung und Nakayama (angewendet mit dem Ideal $(a) \subset \mathfrak{p} = J(R)$) ist $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$. Daraus folgt $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} R_\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}R_\mathfrak{q})(\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q})$. Da $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ das maximale Ideal im lokalen Ring $R_\mathfrak{q}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = 0$ nach Nakayama. Zu jedem $x \in \mathfrak{q}$ gibt es dann ein $s \in R \setminus \mathfrak{q}$ mit $sx^n = 0$. Dies impliziert aber $x = 0$, da R ein Integritätsring ist. □

Korollar 3.2.22. *Sei R ein noetherscher Ring und sei $a \in R$ ein Nichtnullteiler. Dann gilt*

$$\dim(R/(a)) \leq \dim(R) - 1.$$

Beweis. Eine Kette von Primidealen in $R/(a)$ der Länge r entspricht einer Kette von a enthaltenden Primidealen $\mathfrak{p}_0 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_r$ in R. Da a kein Nullteiler in R ist, ist es auch kein Nullteiler in $R/\sqrt{0}$. Nach Satz 3.2.21 ist $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}_r) \geq 1$, d.h., es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}_{r+1} \subsetneqq \mathfrak{p}_r$. Damit ist $\dim(R) \geq \dim(R/(a)) + 1$. □

Korollar 3.2.23. *Sei R ein noetherscher Ring und seien $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ Primideale in R. Dann ist die Menge der Primideale $\mathfrak{r}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{r} \subsetneqq \mathfrak{q}$ entweder leer oder unendlich.*

Beweis. Diese Menge ist genau dann nicht leer, wenn $\mathrm{ht}_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \geq 2$. Angenommen, es gibt nur endlich viele solche Primideale $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$. Aus $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{r}_i$ für alle i folgt $\mathfrak{q} \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{r}_i$ nach dem Primvermeidungslemma. Sei $x \in \mathfrak{q} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{r}_i$. Dann ist $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ ein minimales $[x]$ enthaltendes Primideal in $R/\mathfrak{p}$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist $\mathrm{ht}_{R/\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) \leq 1$, und damit ist $n = 0$. □

Satz 3.2.24 (Krullscher Höhensatz)**.** *Sei R ein noetherscher Ring, $I \subset R$ ein Ideal, das von r Elementen erzeugt wird, und sei $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal mit $I \subset \mathfrak{p}$. Dann gilt*

$$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq r + \mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I).$$

Ist insbesondere $\mathfrak{p}$ ein minimales I enthaltendes Primideal, so ist $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis. Sei $I = (a_1, \ldots, a_r)$. Wir beweisen zunächst die letzte Aussage durch Induktion über r. Indem man R durch $R_\mathfrak{p}$ ersetzt, kann man ohne Einschränkung annhemen, dass R local mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ nach Korollar 1.1.28. Ist $r = 0$, so ist $\mathfrak{p}$ das einzige Primideal in R, so dass $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = 0$. Sei $r \geq 1$ und sei $\mathfrak{p}_t \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$ eine Kette von Primidealen der Länge t. Zu zeigen ist, dass $t \leq r$. Wegen Proposition 3.1.3(ii) kann man annehmen, dass es kein weiteres Primideal zwischen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_0$ gibt. Da $I \not\subset \mathfrak{p}_1$, ist $\{a_1, \ldots, a_r\} \not\subset \mathfrak{p}_1$. Ohne Einschränkung ist $a_r \notin \mathfrak{p}_1$. Dann ist $\mathfrak{p}$ das einzige Primideal, das $\mathfrak{p}_1 + (a_r)$ enthält, und aus Korollar 1.1.28 folgt $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}_1 + (a_r)}$. Es gibt insbesondere Gleichungen der Form

$$a_i^n = a_i' + b_i a_r, \quad i \in \{1, \ldots, r-1\}, \quad a_i' \in \mathfrak{p}_1, \quad b_i \in R.$$

Sei nun $I' = (a_1', \ldots, a_{r-1}') \subset \mathfrak{p}_1$, und sei $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}_1$ minimal unter den Primidealen, die I' enthalten. Nach den obigen Gleichungen gilt

$$\mathfrak{p} = \sqrt{I} \subset \sqrt{I' + (a_r)} \subset \sqrt{\mathfrak{p}' + (a_r)} \subset \mathfrak{p}.$$

Damit ist $\mathfrak{p}$ das kleinste Primideal in R, das $\mathfrak{p}' + (a_r)$ enthält, d.h., $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}'$ ist das kleinste Primideal im Restklassenring $R/\mathfrak{p}'$, das $[a_r]$ enthält. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz gilt $\mathrm{ht}_{R/\mathfrak{p}'}(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') \leq 1$, d.h., es gibt kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$. Aus $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}$ folgt nun $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_1$. Also ist $\mathfrak{p}_1$ minimal unter den Primidealen, die I' enthalten. Da I' von $r-1$ Elementen erzeugt wird, gilt $t - 1 \leq r - 1$ nach Induktionsvoraussetzung, d.h., $t \leq r$.

Wir beweisen nun die allgemeine Aussage durch Induktion über $\mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I)$. Den Fall $\mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I) = 0$ haben wir schon erledigt. Sei also $\mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I) \geq 1$ und seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ die minimalen I enthaltenden Primideale in R. Nach dem Primvermeidungslemma ist $\mathfrak{p} \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$. Sei $x \in \mathfrak{p} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ und sei $J = I + (x)$. Dann gilt $\mathrm{ht}_{R/J}(\mathfrak{p}/J) \leq \mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I) - 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq (r+1) + \mathrm{ht}_{R/J}(\mathfrak{p}/J) \leq r + \mathrm{ht}_{R/I}(\mathfrak{p}/I),$$

wie gewünscht. □

Korollar 3.2.25. *Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. Dann ist $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) < \infty$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.2.24 mit $I = \mathfrak{p}$, da das Ideal $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist. □

Bemerkung 3.2.26. Die Krull-Dimension eines noetherschen Ringes kann aber unendlich sein.

Der Krullsche Höhensatz liefert die umgekehrte Ungleichung in der Dimensionsformel aus Proposition 3.2.5(i):

Proposition 3.2.27 (Dimensionsformel für Ringhomomorphismen)**.** *Seien A und B noethersche Ringe und sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ und sei $\mathfrak{q}' \subset B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ das $\mathfrak{q}$ entsprechende Primideal nach Proposition 1.4.22. Dann gilt*

$$\mathrm{ht}_B(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}_A(\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_{B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})}(\mathfrak{q}').$$

Die Gleichheit gilt, wenn $\mathrm{Spec}(\varphi)$ *die Going-Down-Eigenschaft hat, z.B. wenn φ flach ist.*

Beweis. Die Gleichheitsaussage folgt aus Propositionen 3.2.5(i) und 2.2.22. Beide Seiten bleiben unverändert, wenn man A durch $A_\mathfrak{p}$ und B durch $B_\mathfrak{p}$ ersetzt. Ohne Einschränkung ist damit $\mathfrak{p}$ maximal. Sei $r = \mathrm{ht}_A(\mathfrak{p})$. Nach Proposition 3.2.20 gibt es ein von r Elementen erzeugtes Ideal I in R, so dass $\mathfrak{p}$ ein minimales I enthaltendes Primideal ist. Nach Maximalität von $\mathfrak{p}$ ist dann $\mathfrak{p}$ das Radikal von I, und somit haben $\mathfrak{p}B$ und IB dasselbe Radikal. Nach dem Krullschen Höhensatz gilt

$$\mathrm{ht}_B(\mathfrak{q}) \leq r + \mathrm{ht}_{B/IB}(\mathfrak{q}/IB).$$

Zudem gilt

$$\mathrm{ht}_{B/IB}(\mathfrak{q}/IB) = \mathrm{ht}_{B/\mathfrak{p}B}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B) = \mathrm{ht}_{B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})}(\mathfrak{q}').$$

Die erste Gleichheit folgt daraus, dass ein Primideal genau dann IB enthält, wenn es $\mathfrak{p}B$ enthält, und die zweite Gleichheit folgt daraus, dass $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ die Lokalisierung von $B/\mathfrak{p}B$ in $\mathfrak{p}$ ist. □

Proposition 3.2.28 (Dimension von Polynomringen)**.** *Sei R ein noetherscher Ring und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\dim(R[X_1, \dots, X_n]) = \dim(R) + n.$$

Beweis. Es genügt den Fall $n = 1$ zu betrachten. Die Ungleichung $\dim(R[X]) \geq \dim(R) + 1$ gilt nach Proposition 3.2.12. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $R[X]$ noethersch. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal in $R[X]$ und sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. Da $R[X]$ ein freier R-Modul ist, ist der Ringhomomorphismus $R \hookrightarrow R[X]$ flach. Nach Korollar 3.2.27 gilt

$$\mathrm{ht}_{R[X]}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_{\kappa(\mathfrak{p})[X]}(\mathfrak{q}')$$

für ein geeignetes $\mathfrak{q}'$. Da $\kappa(\mathfrak{p})[X]$ ein Hauptidealring ist, gilt auf jeden Fall $\mathrm{ht}_{\kappa(\mathfrak{p})[X]}(\mathfrak{q}') \leq 1$ nach Proposition 3.2.11. Also gilt

$$\mathrm{ht}_{R[X]}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) + 1.$$

Nach Bemerkung 3.2.8(ii) schließen wir daraus, dass $\dim(R[X]) \leq \dim(R) + 1$. □

3.2.4 Transzendenzgrad

Wir untersuchen jetzt die Dimensiontheorie der endlich erzeugten Algebren über Körpern.

Notation 3.2.29. Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung und sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in L. Wir bezeichnen mit $K(x_i \mid i \in I) \subset L$ den von $\{x_i \mid i \in I\}$ erzeugten Zwischenkörper von $L \mid K$ (siehe Definition Alg.3.1.12).

Bemerkung 3.2.30.

(i) Es gilt $K[x_i \mid i \in I] \subset K(x_i \mid i \in I)$, und die Gleichheit gilt genau dann, wenn jedes x_i algebraisch über K ist (siehe Satz Alg.3.1.24).

(ii) Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ in L algebraisch unabhängig über K (Definition 2.3.6), so gibt es einen Isomorphismus

$$K(X_i \mid i \in I) \xrightarrow{\sim} K(x_i \mid i \in I), \quad X_i \mapsto x_i,$$

wobei die linke Seite der Quotientenkörper vom Polynomring $K[X_i \mid i \in I]$ ist.

Definition 3.2.31 (Transzendenzbasis)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung. Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in L heißt *Transzendenzbasis* von L über K, wenn sie algebraisch unabhängig über K ist, und wenn L algebraisch über $K(x_i \mid i \in I)$ ist.

Der Beweis vom folgenden Satz ist fast identisch zum Beweis der entsprechenden Aussagen für Basen von Vektorräumen (Sätze LA.3.3.20, LA.3.3.27 und LA.3.3.29).

Satz 3.2.32 (Ergänzungssatz für Transzendenzbasen)**.** *Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung.*

(i) *Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in L, so dass L algebraisch über $K(x_i \mid i \in I)$ ist, und sei $J \subset I$ eine Teilmenge, so dass die Familie $(x_i)_{i \in J}$ algebraisch unabhängig über K ist. Dann existiert eine Menge H mit $J \subset H \subset I$, so dass $(x_i)_{i \in H}$ eine Transzendenzbasis von L über K ist. Insbesondere besitzt $L \mid K$ eine Transzendenzbasis.*

(ii) *Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ Transzendenzbasen von L über K. Dann sind I und J gleichmächtig.*

Beweis. Zu (i). Mit dem Zornschen Lemma erhalten wir ein maximales H mit der Eigenschaft, dass die Familie $(x_i)_{i \in H}$ algebraisch unabhängig ist. Jedes Element x_k mit $k \in I \setminus H$ ist dann algebraisch über $K(x_i \mid i \in H)$, denn nach Maximalität von H ist $(x_i)_{i \in H \cup \{k\}}$ nicht algebraisch unabhängig über K. Nach Proposition Alg.3.1.42 ist damit L algebraisch über $K(x_i \mid i \in H)$, d.h., die Familie $(x_i)_{i\in H}$ ist eine Transzendenzbasis von L über K.

Zu (ii). Wir betrachten zunächst den Sonderfall, wobei I und J unendlich sind. Für jedes $i \in I$ gibt es eine endliche Teilmenge $J_i \subset J$, so dass x_i über $K(y_j \mid j \in J_i)$ algebraisch ist. Sei $J' = \bigcup_{i\in I} J_i \subset J$. Dann ist L algebraisch über $K(y_j \mid j \in J')$, so dass $J' = J$. Nach Satz LA.1.3.36 gilt dann $|J| \leq |I|$. Auf ähnliche Weise ist $|I| \leq |J|$. Nach dem Satz von Cantor-Bernstein-Schröder (Satz LA.1.3.33) sind I und J gleichmächtig.

Falls I endlich ist, gehen wir durch Induktion über $|I|$ vor. Ist $I = \varnothing$, so ist $L \mid K$ algebraisch, so dass auch $J = \varnothing$. Sei $e \in I$ beliebig. Da $(y_j)_{j\in J}$ eine Transzendenzbasis ist, gibt es ein Polynom $f \in K[X, Y_1, \ldots, Y_n] \setminus \{0\}$ mit $f(x_e, y_{j_1}, \ldots, y_{j_n}) = 0$, wobei $j_1, \ldots, j_n \in J$ paarweise verschiedene Indizes sind. Mindestens eines der Y_i, ohne Einschränkung Y_1, muss in f auftauchen, da x_e transzendent über K ist. Sei nun

$$\tilde{y}_j = \begin{cases} x_e, & \text{falls } j = j_1, \\ y_j, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Behauptung. Die Familie $(\tilde{y}_j)_{j\in J}$ ist eine Transzendenzbasis von L über K.

Diese Behauptung impliziert, dass beide Familien $(x_i)_{i\in I\setminus\{e\}}$ und $(y_j)_{j\in J\setminus\{j_1\}}$ Transzendenzbasen von L über $K(x_e)$ sind, und die Induktionsvoraussetzung liefert dann die gewünschte Aussage.

Wegen des Polynoms f ist y_{j_1} algebraisch über $K(\tilde{y}_j \mid j \in J)$, so dass beide Körpererweiterungen

$$K(\tilde{y}_j \mid j \in J) \subset K(\tilde{y}_j \mid j \in J)(y_{j_1}) \subset L$$

algebraisch sind. Damit ist auch L algebraisch über $K(\tilde{y}_j \mid j \in J)$ (Proposition Alg.3.1.41(i)). Es bleibt zu zeigen, dass die Familie $(\tilde{y}_j)_{j\in J}$ algebraisch unabhängig über K ist, d.h., dass x_e transzendent über $K(y_j \mid j \in J \setminus \{j_1\})$ ist. Dies folgt daraus, dass y_{j_1} algebraisch über $K(\tilde{y}_j \mid j \in J)$ aber transzendent über $K(y_j \mid j \in J \setminus \{j_1\})$ ist. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.2.33. Ein Sonderfall von Satz 3.2.32 ist die folgende Aussage: Sei R eine K-Algebra, die eine Integritätsring ist. Dann gibt es eine Familie in R, die eine Transzendenzbasis von $Q(R)$ über K ist.

Definition 3.2.34 (Transzendenzgrad)**.** Sei $L \mid K$ eine Körpererweiterung. Der *Transzendenzgrad* $\operatorname{trdeg}_K L$ von L über K ist die Mächtigkeit einer Transzendenzbasis von L über K. Dies ist wohldefiniert nach Satz 3.2.32(ii).

Beispiel 3.2.35.

(i) Die Familie $(X_1, \ldots, X_n)$ ist eine Transzendenzbasis von $K(X_1, \ldots, X_n)$ über K, so dass
$$\operatorname{trdeg}_K K(X_1, \ldots, X_n) = n.$$
Jede algebraische Körpererweiterung von $K(X_1, \ldots, X_n)$ hat damit auch Transzendenzgrad n über K.

(ii) Für jedes $n \geq 1$ ist das Element X^n eine Transzendenzbasis von $K(X)$ über K, und es gilt $[K(X) : K(X^n)] = n$. Dies zeigt, dass es keine Eindeutigkeitsaussage für den Grad des algebraischen Teils einer nicht-algebraischen Körpererweiterung gibt.

(iii) Ist $L \mid K$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung (d.h., $L = K(a_i \mid i \in I)$ mit I endlich), so ist $\operatorname{trdeg}_K L \leq |I| < \infty$ nach Satz 3.2.32(i).

Proposition 3.2.36 (Dimension und Transzendenzgrad)**.** *Sei K ein Körper und sei A eine endlich erzeugte K-Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann ist*

$$\dim(A) = \operatorname{trdeg}_K Q(A).$$

Beweis. Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz 2.3.8 ist A eine endliche Erweiterung eines Polynomringes $K[X_1,\dots,X_d]$. Nach Propositionen 3.2.14 und 3.2.28 gilt dann $\dim(A)=d$. Nach Korollar 2.1.20(i) und Proposition 2.2.12(i) ist $Q(A)$ eine ganze Erweiterung von $K(X_1,\dots,X_d)$, d.h., eine algebraische Körpererweiterung. Damit ist

$$\operatorname{trdeg}_K Q(A)=\operatorname{trdeg}_K K(X_1,\dots,X_d)=d. \qquad \square$$

Lemma 3.2.37. *Sei R ein faktorieller Ring und sei $\mathfrak{p}\subset R$ ein Primideal. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p})=1$.

(ii) *Es gibt ein Primelement $f\in R$ mit $\mathfrak{p}=(f)$.*

Beweis. Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Primfaktorzerlegung gibt es ein Primelement $f\in\mathfrak{p}$. Dann ist (f) ein Primideal, so dass $(f)=\mathfrak{p}$ nach Definition der Höhe.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $0\neq\mathfrak{q}\subset(f)$ ein Primideal, und sei $g\in\mathfrak{q}\setminus\{0\}$ ein Primelement. Aus der Irreduzibilität von g folgt $(f)=(g)\subset\mathfrak{q}$, und somit $(f)=\mathfrak{q}$. $\square$

Satz 3.2.38. *Sei K ein Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra, die ein Integritätsring ist. Für alle Primideale $\mathfrak{p}\subset A$ gilt dann*

$$\dim(A)=\dim(A/\mathfrak{p})+\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Die Ungleichung $\geq$ folgt aus Proposition 3.2.10(iii). Wir beweisen die umgekehrte Ungleichung durch Induktion über $\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})$. Ist $\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})=0$, so ist $\mathfrak{p}=0$ (da A ein Integritätsring ist), und die Aussage ist klar. Sei also $\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})\geq 1$ und sei $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1 in einer Kette der Länge $\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})$, so dass $\operatorname{ht}_{A/\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})=\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\dim(A/\mathfrak{q})=\dim(A/\mathfrak{p})+\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})-1.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ der Höhe 1 gilt $\dim(A/\mathfrak{q})\geq\dim(A)-1$.

Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz gibt es eine endliche Ringerweiterung

$$\varphi\colon K[X_1,\dots,X_d]\hookrightarrow A,$$

und es ist $d=\dim(A)$ nach Proposition 3.2.14. Sei nun $\mathfrak{p}=\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Die induzierte Ringerweiterung $\bar{\varphi}\colon K[X_1,\dots,X_d]/\mathfrak{p}\hookrightarrow A/\mathfrak{q}$ ist wieder endlich, so dass

$$\dim(A/\mathfrak{q})=\dim(K[X_1,\dots,X_d]/\mathfrak{p}).$$

Nach dem Satz von Gauß ist $K[X_1,\dots,X_d]$ faktoriell und insbesondere normal. Da A ein Integritätsring ist, hat $\operatorname{Spec}(\varphi)$ die Going-Down-Eigenschaft nach dem Going-Down-Satz 2.2.17. Daraus folgt unmittelbar, dass die Höhe von $\mathfrak{p}$ auch gleich 1 ist. Nach Lemma 3.2.37 ist damit $\mathfrak{p}=(f)$ für ein Primelement $f\in K[X_1,\dots,X_d]$. Da $f\notin K$, taucht eine der Variablen X_i in f auf; ohne Einschränkung taucht X_1 in f auf. Dann sind die Restklassen $[X_2]$, $\dots$, $[X_d]$ in $K[X_1,\dots,X_d]/(f)$ algebraisch unabhängig, da $K[X_2,\dots,X_d]\cap(f)=\{0\}$. Damit ist $Q(K[X_1,\dots,X_d]/(f))$ eine Körpererweiterung von $Q(K[X_2,\dots,X_d])\cong K(X_2,\dots,X_d)$. Mit Proposition 3.2.36 erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim(K[X_1,\dots,X_d]/(f))&=\operatorname{trdeg}_K Q(K[X_1,\dots,X_d]/(f))\\&\geq\operatorname{trdeg}_K K(X_2,\dots,X_d)\\&=d-1,\end{aligned}$$

wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 3.2.39.

(i) Satz 3.2.38 gilt nicht unbedingt, wenn die K-Algebra A kein Integritätsring ist. Zum Beispiel gilt $\dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{ht}_A(\mathfrak{p}) = 1$ für die 2-dimensionale K-Algebra $K[X,Y] \times K[Z]$ und das Primideal $\mathfrak{p} = K[X,Y] \times \{0\}$.

(ii) Satz 3.2.38 gilt auch nicht für beliebige noethersche Integritätsringe A. Ein Gegenbeispiel ist der Ring $A = \mathbb{Z}_{(p)}[T]$ mit dem Primideal $\mathfrak{p} = (pT - 1)$.

Korollar 3.2.40 (Dimension von Hyperflächen)**.** *Sei K ein Körper, A eine endlich erzeugte K-Algebra, und $f \in A$ ein Element, das weder eine Einheit noch ein Nullteiler ist. Dann gilt*

$$\dim(A/(f)) = \dim(A) - 1.$$

Beweis. Die Ungleichung $\dim(A/(f)) \leq \dim(A) - 1$ ist ein Sonderfall von Korollar 3.2.22. Nach Proposition 3.2.4(iii) ist $\dim(A)$ bzw. $\dim(A/(f))$ das Maximum der Dimensionen von $A/\mathfrak{p}$ bzw. von $(A/\mathfrak{p})/([f])$, wobei $\mathfrak{p}$ über die minimalen Primidealen von A läuft. Nach Proposition 3.2.17(i) liegt f in keinem minimalen Primideal, so dass $[f]$ kein Nullteiler in $A/\mathfrak{p}$ ist. Indem wir A durch $A/\mathfrak{p}$ ersetzen, können wir damit annehmen, dass A ein Integritätsring ist.

Sei nun $\mathfrak{p} \subset A$ ein minimales f enthaltendes Primideal. Nach Proposition 3.2.4(i) genügt es zu zeigen, dass $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq \dim(A) - 1$. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz 3.2.21 ist $\mathrm{ht}_A(\mathfrak{p}) = 1$, und die Formel folgt nun aus Satz 3.2.38. □

3.2.5 Noethersche lokale Ringe

Satz 3.2.41 (Dimension noetherscher lokaler Ringe)**.** *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann gilt*

$$\dim(R) = \min\{r \in \mathbb{N} \mid \textit{es gibt } x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m} \textit{ mit } \sqrt{(x_1, \ldots, x_r)} = \mathfrak{m}\}.$$

Beweis. Sei $d = \dim(R) = \mathrm{ht}_R(\mathfrak{m})$. Ist $\sqrt{(x_1, \ldots, x_r)} = \mathfrak{m}$, so ist $\mathfrak{m}$ das kleinste $(x_1, \ldots, x_r)$ enthaltende Primideal in R. Nach dem Krullschen Höhensatz gilt dann $d \leq r$. Nach Proposition 3.2.20 gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$, so dass $\mathfrak{m}$ das einzige Primideal mit $(x_1, \ldots, x_r) \subset \mathfrak{m}$ ist. Aus Korollar 1.1.28 folgt $\sqrt{(x_1, \ldots, x_d)} = \mathfrak{m}$. □

Definition 3.2.42 (Parametersystem)**.** Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Eine Familie $(x_1, \ldots, x_d)$ in R heißt *Parametersystem* von R, wenn $d = \dim(R)$ und $\sqrt{(x_1, \ldots, x_d)} = \mathfrak{m}$.

Nach Satz 3.2.41 besitzt jeder noethersche lokale Ring ein Parametersystem.

Korollar 3.2.43. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, und sei $x \in \mathfrak{m}$ kein Nullteiler. Dann ist* $\dim(R/(x)) = \dim(R) - 1$.

Beweis. Die Ungleichung $\dim(R/(x)) \leq \dim(R) - 1$ folgt aus Korollar 3.2.22. Sei $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ ein Parametersystem von $R/(x)$, so dass $\dim(R/(x)) = r$, und sei $x_i \in \mathfrak{m}$ ein Urbild von $\bar{x}_i$. Dann ist $\mathfrak{m}$ das Radikal von $(x, x_1, \ldots, x_r)$. Nach Satz 3.2.41 ist $\dim(R) \leq r + 1$. □

Proposition 3.2.44. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und seien $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Familie $(x_1, \ldots, x_r)$ kann zu einem Parametersystem von R ergänzt werden.*

(ii) *Es gilt* $\dim(R/(x_1, \ldots, x_r)) = \dim(R) - r$.

Beweis. *Zu* (ii) $\Rightarrow$ (i). Der Ring $R/(x_1,\dots,x_r)$ ist noethersch und lokal. Sei $(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_s)$ ein Parametersystem von $R/(x_1,\dots,x_r)$, so dass $\dim(R/(x_1,\dots,x_r)) = s$, und sei $y_i \in \mathfrak{m}$ ein Urbild von $\bar{y}_i$. Nach (ii) ist $\dim(R) = r+s$. Die Familie $(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s)$ ist dann ein Parametersystem von R, da sein Radikal gleich $\mathfrak{m}$ ist.

Zu (i) $\Rightarrow$ (ii). Die Ungleichung $\geq$ gilt ohne Voraussetzung, denn: Seien $y_1,\dots,y_s \in \mathfrak{m}$ Elemente, deren Restklassen modulo $(x_1,\dots,x_r)$ ein Parametersystem von $R/(x_1,\dots,x_r)$ bilden. Dann gilt $\sqrt{(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s)} = \mathfrak{m}$, und aus Satz 3.2.41 folgt $\dim(R) \leq r+s = r+\dim(R/(x_1,\dots,x_r))$. Nach (i) hat R ein Parametersystem der Form $(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_t)$. Ist $\bar{y}_i$ die Restklasse von y_i modulo $(x_1,\dots,x_r)$, so ist $\sqrt{(\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_t)}$ gleich dem maximalen Ideal von $R/(x_1,\dots,x_r)$. Nach Satz 3.2.41 gilt $\dim(R/(x_1,\dots,x_r)) \leq t = \dim(R) - r$. □

Definition 3.2.45 (Kotangentialraum, Tangentialraum)**.** Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Der $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum $\mathfrak{p} \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ heißt *Kotangentialraum* zu R im Punkt $\mathfrak{p}$ und wird mit $T^*_{\mathfrak{p}}R$ bezeichnet. Sein Dualraum heißt *Tangentialraum* und wird mit $T_{\mathfrak{p}}R$ bezeichnet.

Bemerkung 3.2.46.

(i) Nach Proposition 1.2.18 gilt $T^*_{\mathfrak{p}}R \cong T^*_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}R_{\mathfrak{p}}$. Insbesondere hängt der Kotangentialraum zu R in $\mathfrak{p}$ nur von dem lokalen Ring $R_{\mathfrak{p}}$ ab.

(ii) Wegen $\kappa(\mathfrak{p}) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ gilt $T^*_{\mathfrak{p}}R \cong \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^2$. Ist $\mathfrak{m}$ maximal, so gilt $\kappa(\mathfrak{m}) \cong R/\mathfrak{m}$ und damit $T^*_{\mathfrak{m}}R \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

(iii) Ist $\mathfrak{p}$ endlich erzeugt, so ist der $\kappa(\mathfrak{p})$-Vektorraum $T^*_{\mathfrak{p}}R$ endlich-dimensional, so dass er kanonisch zum Dualraum zu $T_{\mathfrak{p}}R$ isomorph ist (Proposition LA.4.1.59).

Bemerkung 3.2.47 (Vergleich zur Differentialgeometrie)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $x \in M$. Das Ideal $\mathfrak{m}_x$ der in x verschwindenden glatten Funktionen ist dann ein maximales Ideal im Ring $C^\infty(M,\mathbb{R})$ (siehe Beispiel 1.3.27), und die Ableitungsabbildung

$$\mathfrak{m}_x \to T^*_x(M), \quad f \mapsto df(x),$$

ist surjektiv mit Kern $\mathfrak{m}_x^2$. Es gilt also

$$T^*_x(M) \cong T^*_{\mathfrak{m}_x}C^\infty(M,\mathbb{R}) \quad \text{und daher} \quad T_x(M) \cong T_{\mathfrak{m}_x}C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

Notation 3.2.48. Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und ist $f \in \mathfrak{m}$, so bezeichnen wir mit $df \in T^*_{\mathfrak{m}}R \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Restklasse von f modulo $\mathfrak{m}^2$.

Proposition 3.2.49. *Sei R ein noetherscher Ring. Für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ gilt*

$$\operatorname{ht}_R(\mathfrak{p}) \leq \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(T_{\mathfrak{p}}R) < \infty.$$

Ist insbesondere R noethersch und lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so gilt

$$\dim(R) \leq \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(T_{\mathfrak{m}}R) < \infty.$$

Beweis. Indem man R durch $R_{\mathfrak{p}}$ ersetzt, genügt es die zweite Aussage zu beweisen. Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{m}$ endlich erzeugt, so dass der $\kappa(\mathfrak{m})$-Vektorraum $T^*_{\mathfrak{m}}R = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ endlich-dimensional ist. Nach Proposition LA.4.1.56 haben damit $T_{\mathfrak{m}}R$ und $T^*_{\mathfrak{m}}R$ dieselbe Dimension. Man wählt $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{m}$ aus, so dass $(dx_1,\dots,dx_n)$ eine Basis von $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist. Nach Nakayama (Korollar 1.2.41) ist dann $\mathfrak{m} = (x_1,\dots,x_n)$, und aus dem Krullschen Höhensatz folgt $\dim(R) = \operatorname{ht}_R(\mathfrak{m}) \leq n$. □

Beispiel 3.2.50. Sei K ein Körper.

(i) Sei $R = K[X,Y]/(Y^2 - X)$ und sei $\mathfrak{m} = (X,Y) \subset R$. Dann ist $\operatorname{ht}_R(\mathfrak{m}) = 1$ und der Kotangentialraum $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist auch eindimensional mit Basis dY, denn: (X,Y) ist ein K-Vektorraum mit Basis $(Y^i)_{i\geq 1}$ und der Unterraum $(X,Y)^2$ hat die Basis $(Y^i)_{i\geq 2}$.

(ii) Sei $R = K[X,Y]/(Y^2 - X^n)$ mit $n \geq 2$ und sei $\mathfrak{m} = (X,Y) \subset R$. Dann ist $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = 1$, aber der Kotangentialraum $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist zweidimensional mit Basis (dX, dY), denn: (X,Y) hat die Basis $(X^{i+1}, X^iY)_{i\geq 0}$ über K und $(X,Y)^2$ hat die Basis $(X^{i+1}, X^iY)_{i\geq 1}$.

(iii) Sei $R = K[X,Y]/(X,Y)^2$ und sei $\mathfrak{m} = (X,Y) \subset R$. Es gilt $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = 0$ und der Kotangentialraum $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist zweidimensional mit Basis (dX, dY).

Zum Schluss besprechen wir noch kurz den Begriff der *Regularität.*

Definition 3.2.51 (regulärer Ring)**.** Ein noetherscher Ring R heißt *regulär*, wenn für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(R)$ gilt $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{m}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(T_{\mathfrak{m}}R)$.

Beispiel 3.2.52. Jeder Hauptidealring R ist regulär, denn: Ist $p \in R$ ein Primelement, so ist $T^*_{(p)}R \cong (p)/(p^2)$ ein eindimensionaler $R/(p)$-Vektorraum mit Basis $([p])$.

Proposition 3.2.53 (Charakterisierung regulärer lokaler Ringe)**.** *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *R is regulär, d.h., es gilt* $\dim(R) = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(T_{\mathfrak{m}}R)$.

(ii) *Es gibt ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ mit* $\dim(R)$ *Elementen.*

Beweis. *Zu* (i) $\Rightarrow$ (ii). Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$, so dass $(dx_1, \ldots, dx_n)$ eine Basis von $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist. Es ist $n = \dim(R)$ nach Regularität von R. Nach Nakayama ist $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ mit $n = \dim(R)$. Die Restklassen modulo $\mathfrak{m}^2$ bilden dann ein Erzeugendensystem von $T^*_{\mathfrak{m}}R$, so dass $\dim(T^*_{\mathfrak{m}}R) \leq n$. Proposition 3.2.49 liefert die Gleichheit. ☐

Proposition 3.2.54. *Sei R ein regulärer noetherscher lokaler Ring, und seien $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Familie $(dx_1, \ldots, dx_r)$ in $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ist $\kappa(\mathfrak{m})$-linear unabhängig.*

(ii) *Der lokale Ring $R/(x_1, \ldots, x_r)$ ist regulär der Dimension* $\dim(R) - r$.

Beweis. *Zu* (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $d = \dim(R) = \dim_{\kappa(\mathfrak{m})}(T^*_{\mathfrak{m}}R)$. Indem man $(dx_1, \ldots, dx_r)$ zu einer Basis von $T^*_{\mathfrak{m}}R$ ergänzt und das Lemma von Nakayama anwendet, kann man $(x_1, \ldots, x_r)$ zu einer Erzeugendensystem $(x_1, \ldots, x_d)$ von $\mathfrak{m}$ ergänzen. Nach Proposition 3.2.44 gilt insbesondere $\dim(R/(x_1, \ldots, x_r)) = d - r$. Zudem ist $(\bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_d)$ ein Erzeugendensystem vom maximalen Ideal $\mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_r)$, so dass $R/(x_1, \ldots, x_n)$ regulär ist.

Zu (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_r)$. Ohne Regularitätsvoraussetzungen gilt

$$T^*_{\bar{\mathfrak{m}}}(R/(x_1, \ldots, x_r)) \cong (T^*_{\mathfrak{m}}R)/\mathrm{Span}_{\kappa(\mathfrak{m})}\{dx_1, \ldots, dx_r\}.$$

Damit hat $\mathrm{Span}_{\kappa(\mathfrak{m})}\{dx_1, \ldots, dx_r\}$ die Dimension r. ☐

Beispiel 3.2.55. Sei K ein Körper, sei $R = K[X,Y]_{(X,Y)}$ und sei $\mathfrak{m} = (X,Y)R$ das maximale Ideal in R. Dann ist R regulär der Dimension 2. Für Restklassenringe der Form $R/(Y^2 - Xf)$ mit $f \in K[X]$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$R/(Y^2 - Xf) \text{ ist regulär } \iff Y^2 - Xf \notin \mathfrak{m}^2 \iff f(0) \neq 0.$$

Falls $f(0) = 0$ hat die algebraische Kurve $V_K(Y^2 - Xf) \subset K^2$ eine Singularität im Ursprung (zum Beispiel einen Knoten $Y^2 - X^2(X+1)$ oder eine Spitze $Y^2 - X^3$), sonst ist die Kurve „glatt“ durch den Ursprung.

Bemerkung 3.2.56. Sei R ein regulärer noetherscher Ring. Durch weitere Entwicklung der Dimensionstheorie kann man die folgenden nicht-trivialen Aussagen beweisen:

(i) Jede Lokalisierung $S^{-1}R$ ist wieder regulär. Insbesondere ist der lokale Ring $R_\mathfrak{p}$ regulär für alle Primideale $\mathfrak{p}$, so dass auch für nicht-maximale Primideale $\mathfrak{p}$ gilt $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}(T_\mathfrak{p}R)$.

(ii) Der Ring R ist normal (Definition 2.1.22), und damit ein endliches Produkt von regulären Integritätsringen. Insbesondere ist jeder reguläre noethersche lokale Ring ein Integritätsring.

Bemerkung 3.2.57 (Dedekindsche Ringe)**.** Ein noetherscher Integritätsring ist genau dann regulär der Dimension ≤ 0, wenn er ein Körper ist. Ein *Dedekindscher Ring* ist ein regulärer noetherscher Integritätsring der Dimension ≤ 1. Jeder Hauptidealring ist also ein Dedekindscher Ring, aber die Umkehrung gilt nicht.

Es gibt viele nützliche Charakterisierungen von Dedekindschen Ringen. Für einen Integritätsring R sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) R ist ein Dedekindscher Ring.

(ii) R ist noethersch und normal der Dimension ≤ 1.

(iii) R ist noethersch und für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R_\mathfrak{p}$ ein Bewertungsring (d.h., ein Integritätsring, in dem die Teilbarkeitsrelation total ist).

(iv) Jedes Ideal in R ist ein projektiver R-Modul.

(v) Jedes nicht-triviale Ideal in R ist invertierbar bzgl. $\otimes_R$.

(vi) Jedes Ideal in R ist ein endliches Produkt von Primidealen.

Zum Beispiel ist der ganze Abschluss $\mathcal{O}_K$ von $\mathbb{Z}$ in einer algebraischen Körpererweiterung $K \mid \mathbb{Q}$ ein Dedekindscher Ring (nach der Charakterisierung (ii)). Deswegen spielen Dedekindsche Ringe eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie. Dedekindsche Ringe sind nicht unbedingt faktoriell (zum Beispiel $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$), aber nach (vi) gibt es trotzdem eine eindeutige Primfaktorzerlegung von *Idealen* statt von Elementen.

Kapitel 4

Homologische Algebra

4.1 Kettenkomplexe und ihre Homologie

4.1.1 Die Kategorie der Kettenkomplexe

Definition 4.1.1 (Kettenkomplex, Kette, Randoperator)**.** Sei R ein Ring. Ein *Kettenkomplex* von R-Moduln ist ein Paar (C_*, d_*), wobei:

- $C_* = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine über $\mathbb{Z}$ indizierte Familie von R-Moduln, und
- $d_* = (d_n : C_n \to C_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Familie von R-linearen Abbildungen, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Die Elemente von C_n heißen die *n-Ketten* von C und die Abbildungen d_n heißen die *Randoperatoren* von C.

Notation 4.1.2. Die Randoperatoren von einem Kettenkomplex werden immer mit d_n geschrieben, sofern nicht anders angegeben. Man schreibt auch d anstelle von d_n, wenn der Index n klar aus dem Kontext ist.

Beispiel 4.1.3.

(i) Jede (über $\mathbb{Z}$ indizierte) exakte Sequenz von R-Moduln ist ein Kettenkomplex.

(ii) Die alternierende Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots$$

ist ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen, denn $\mathrm{id}_\mathbb{Z} \circ 0 = 0$ und $0 \circ \mathrm{id}_\mathbb{Z} = 0$.

(iii) Die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_\mathbb{Z}} \cdots$$

ist *kein* Kettenkomplex, denn $\mathrm{id}_\mathbb{Z} \circ \mathrm{id}_\mathbb{Z} = \mathrm{id}_\mathbb{Z} \neq 0$.

(iv) Sei $A \in M_n(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit $A^2 = 0$, zum Beispiel $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$\cdots \xrightarrow{L_A} R^n \xrightarrow{L_A} R^n \xrightarrow{L_A} R^n \xrightarrow{L_A} \cdots$$

ein Kettenkomplex.

Definition 4.1.4 (Kettenabbildung)**.** Seien $C = (C_*, d_*)$ und $C' = (C'_*, d'_*)$ Kettenkomplexe von R-Moduln. Eine (R-lineare) *Kettenabbildung* f von C nach C' ist eine Familie von R-lineare Abbildungen

$$f = (f_n \colon C_n \to C'_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Notation 4.1.5 (Kategorien von Kettenkomplexen)**.** Sei R ein Ring. Kettenkomplexe von R-Moduln und Kettenabbildungen bilden eine Kategorie $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$, wobei die Komposition von $f \colon C \to C'$ und $g \colon C' \to C''$ gleich $(g_n \circ f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist, und die Identität auf C gleich $(\mathrm{id}_{C_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist.

Ein Kettenkomplex C heißt *nichtnegativ* bzw. *nichtpositiv*, wenn $C_n = 0$ für alle $n < 0$ bzw. $n > 0$. Man bezeichnet mit $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ und $\mathrm{Ch}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ die entsprechenden vollen Unterkategorien von $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$.

Bemerkung 4.1.6 (Moduln als Kettenkomplexe)**.** Man kann die Kategorie $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ der R-Moduln mit einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ identifizieren, nämlich dem Durchschnitt $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \cap \mathrm{Ch}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$. Genauer ist der Funktor

$$\mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R), \quad M \text{ bzw. } f \mapsto \begin{pmatrix} M \text{ bzw. } f, & \text{wenn } n = 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{Z}},$$

volltreu mit wesentlichem Bild $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \cap \mathrm{Ch}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$.

Bemerkung 4.1.7 (der Modul der Kettenabbildungen)**.** Seien C und C' Kettenkomplexe von R-Moduln. Die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C')$ hat dann eine Struktur von R-Moduln: Sind $f, g \colon C \to C'$ Kettenabbildungen und ist $r \in R$, so sind die Familien

$$rf = (rf_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{und} \quad f + g = (f_n + g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

wieder Kettenabbildungen von C nach C'. Außerdem ist die Kompositionsabbildung

$$\circ \colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C') \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C', C'') \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C'')$$

R-bilinear.

4.1.2 Homologie und die lange exakte Homologiesequenz

Definition 4.1.8 (Zykel, Rand, Homologie)**.** Sei $C = (C_*, d_*)$ ein Kettenkomplex von R-Moduln.

- Die Elemente von $Z_n(C) := \ker d_n \subset C_n$ heißen *n-Zykel* von C.
- Die Elemente von $B_n(C) := \mathrm{im}\, d_{n+1} \subset C_n$ heißen *n-Ränder* von C.
- Wegen $d_n \circ d_{n+1} = 0$ gilt $B_n(C) \subset Z_n(C)$. Der Quotientenmodul

  $$H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$$

  heißt die n-te *Homologiegruppe* (auch der n-te *Homologiemodul* oder einfach die n-te *Homologie*) von C. Die Elemente von $H_n(C)$ heißen *n-Homologieklassen* von C.

Bemerkung 4.1.9 (Homologie und Exaktheit)**.** Sei $C = (C_*, d_*)$ ein Kettenkomplex. Die Homologiegruppen von C messen genau die Nicht-Exaktheit von C, denn: Die n-te Homologiegruppe $H_n(C)$ ist nach Definition genau dann null, wenn $B_n(C) = Z_n(C)$, d.h., wenn die Sequenz

$$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}$$

exakt ist.

Bemerkung 4.1.10 (Homologiefunktoren)**.** Sei $f\colon C \to C'$ eine Kettenabbildung. Aus der Kompatibilität von f mit den Randoperatoren folgern wir die folgenden Aussagen:

(i) $f_n\colon C_n \to C'_n$ erhält n-Zykel, d.h., lässt sich zu einer Abbildung

$$Z_n(f)\colon Z_n(C) \to Z_n(C')$$

einschränken.

(ii) $f_n\colon C_n \to C'_n$ erhält n-Ränder, d.h., lässt sich zu einer Abbildung

$$B_n(f)\colon B_n(C) \to B_n(C')$$

einschränken.

(iii) Nach (i) und (ii) induziert f_n eine wohldefinierte R-lineare Abbildung

$$H_n(f)\colon H_n(C) \to H_n(C'), \quad (x + B_n(C)) \mapsto (f_n(x) + B_n(C')).$$

Diese Konstruktionen sind offensichtlich kompatibel mit Komposition und definieren damit Funktoren

$$Z_n, B_n, H_n\colon \mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$$

mit natürlichen Transformationen $B_n \hookrightarrow Z_n \twoheadrightarrow H_n$.

Beispiel 4.1.11 (Kettenkomplexe aus Graphen)**.** Ein Tripel (K, P, e) bestehend aus Mengen K und P und einer Abbildung $e\colon P \to K \times K$ heißt *gerichteter Graph*. Die Elemente von K heißen *Knoten* und die von P *Pfeilen*. Ist $e(\alpha) = (x, y)$, so heißt x die *Quelle* und y das *Ziel* vom Pfeil α. Man kann jedem solchen Graphen einen Kettenkomplex von abelschen Gruppen C zuordnen, mit

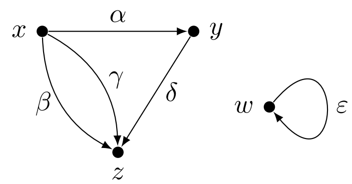
$$\begin{aligned} C_0 = \mathbb{Z}^{(K)}, \quad C_1 = \mathbb{Z}^{(P)}, \quad C_n = 0 \text{ für } n \notin \{0,1\}, \\ \text{und} \quad d_1(\alpha) = (\text{Ziel von } \alpha) - (\text{Quelle von } \alpha) \quad \text{für alle } \alpha \in P. \end{aligned}$$

Es gibt dann eine exakte Sequenz

$$0 \to H_1(C) \to \mathbb{Z}^{(P)} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}^{(K)} \to H_0(C) \to 0.$$

Man kann leicht zeigen, dass die abelsche Gruppe $H_0(C)$ eine kanonische Basis hat, die über die Zusammenhangskomponenten vom Graphen indiziert wird. Insbesondere ist der Rang von $H_0(C)$ gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Nach Proposition 1.2.31 ist auch $H_1(C)$ eine freie abelsche Gruppe; ihr Rang kann man als die Anzahl der Zyklen im Graphen verstehen.

Als Beispiel betrachten wir den gerichteten Graphen



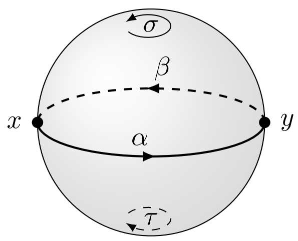
mit zwei Zusammenhangskomponenten und drei Zyklen. Der zugehörige Kettenkomplex ist

$$C_1 = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta \oplus \mathbb{Z}\gamma \oplus \mathbb{Z}\delta \oplus \mathbb{Z}\varepsilon \xrightarrow{d_1} C_0 = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y \oplus \mathbb{Z}z \oplus \mathbb{Z}w.$$

Man kann dann leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} H_1(C) &= \ker d_1 = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{\beta - \gamma, \beta + \delta - \alpha, \varepsilon\} \cong \mathbb{Z}^3, \\ H_0(C) &= \operatorname{coker} d_1 = \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}}\{[x], [w]\} \cong \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

Beispiel 4.1.12 (Kettenkomplexe aus Zellkomplexen)**.** Die Konstruktion aus Beispiel 4.1.11 lässt sich auf Zellkomplexe verallgemeinern. Ein *Zellkomplex* ist grob gesagt ein gerichteter Graph höherer Dimension. Wir definieren jetzt diesen Begriff nicht, aber betrachten nur ein einfaches zweidimensionales Beispiel:



Dieser Zellkomplex hat zwei Knoten x, y, zwei Pfeile α, β und zwei (orientierte) Flächen σ, τ. Der zugehörige Kettenkomplex C sieht dann wie folgt aus:

$$C_0 = \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y, \quad C_1 = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta, \quad C_2 = \mathbb{Z}\sigma \oplus \mathbb{Z}\tau, \quad C_n = 0 \text{ für } n \notin \{0,1,2\}$$

mit

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= y - x, & \qquad d_2(\sigma) &= \alpha + \beta, \\ d_1(\beta) &= x - y, & \qquad d_2(\tau) &= -\alpha - \beta. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$H_n(C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{wenn } n = 0, \quad \text{(mit Basis } [x] = [y]) \\ 0, & \text{wenn } n = 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{wenn } n = 2, \quad \text{(mit Basis } \sigma + \tau) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies stimmt mit der Homologie der 2-Sphäre überein, die in der Algebraischen Topologie definiert wird. Im Gegensatz zum Sonderfall der gerichteten Graphen sind die Homologiegruppen von Zellkomplexen nicht unbedingt frei (außer H_0).

Definition 4.1.13 (kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen)**.** Eine *kurze exakte Sequenz* von Kettenkomplexen ist eine Sequenz von Kettenabbildungen

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0,$$

so dass für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Sequenz

$$0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$$

exakt ist.

Proposition 4.1.14 (die lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen von R-Moduln. Dann gibt es kanonische R-lineare Abbildungen $\partial_n \colon H_n(E) \to H_{n-1}(C)$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] & H_n(D) \arrow[r, "H_n(g)"] & H_n(E) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[description]{$\scriptstyle\partial_n$} ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
& H_{n-1}(C) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"'] & H_{n-1}(D) \arrow[r, "H_{n-1}(g)"'] & H_{n-1}(E) \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Außerdem ist diese exakte Sequenz funktoriell: Ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen, so ist das folgende Diagramm auch kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(f)"] \arrow[d, "H_n(\gamma)"] & H_n(D) \arrow[r, "H_n(g)"] \arrow[d, "H_n(\delta)"] & H_n(E) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(\varepsilon)"] & H_{n-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\gamma)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(f')"] & H_n(D') \arrow[r, "H_n(g')"] & H_n(E') \arrow[r, "\partial_n"] & H_{n-1}(C') \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir werden das Schlangenlemma (Proposition 1.2.35) zweimal anwenden. Wir betrachten zunächst das kommutative Diagramm von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n"] & D_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & D_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & E_{n-1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nach dem Schlangenlemma erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(C) \arrow[r, "f'_n"] & Z_n(D) \arrow[r, "g'_n"] & Z_n(E) \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
& C_{n-1}/B_{n-1}(C) \arrow[r, "\bar{f}_{n-1}"'] & D_{n-1}/B_{n-1}(D) \arrow[r, "\bar{g}_{n-1}"'] & E_{n-1}/B_{n-1}(E) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Insbesondere sind beide Zeilen im folgenden Diagramm exakt:

$$\begin{tikzcd}
& C_n/B_n(C) \arrow[r, "\bar{f}_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & D_n/B_n(D) \arrow[r, "\bar{g}_n"] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & E_n/B_n(E) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(C) \arrow[r, "f'_{n-1}"] & Z_{n-1}(D) \arrow[r, "g'_{n-1}"] & Z_{n-1}(E). &
\end{tikzcd}$$

Der Kern von $\bar{d}_n \colon C_n/B_n(C) \to Z_{n-1}$ ist die Homologiegruppe $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ und sein Kokern ist die Homologiegruppe $H_{n-1}(C) = Z_{n-1}(C)/B_{n-1}(C)$. Die gewünschte lange exakte Sequenz folgt dann nochmal aus dem Schlangenlemma.

Zur Funktorialität der Sequenz muss man nur die Gleichheit $\partial_n \circ H_n(\varepsilon) = H_{n-1}(\gamma) \circ \partial_n$ nachprüfen. Dies folgt leicht aus der expliziten Definition von ∂_n im Schlangenlemma. $\square$

Definition 4.1.15 (Quasiisomorphismus)**.** Eine Kettenabbildung $f \colon C \to C'$ heißt *Quasiisomorphismus*, wenn sie Isomorphismen von Homologiegruppen induziert, d.h.: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $H_n(f) \colon H_n(C) \to H_n(C')$ ein Isomorphismus.

Lemma 4.1.16 (Fünferlemma)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_3} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_4} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen.

(i) *Sind f_2 und f_4 injektiv und ist f_1 surjektiv, so ist f_3 injektiv.*

(ii) *Sind f_2 und f_4 surjektiv und ist f_5 injektiv, so ist f_3 surjektiv.*

(iii) *Sind f_1, f_2, f_4 und f_5 bijektiv, so ist f_3 ein bijektiv.*

Beweis. Einfache Diagrammjagd. □

Korollar 4.1.17 (Quasiisomorphismen zwischen kurzen exakten Sequenzen)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \big\downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen mit exakten Zeilen. Sind zwei der Abbildungen γ, δ und ε Quasiisomorphismen, so ist auch die dritte Abbildung ein Quasiisomorphismus.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der langen exakten Homologiesequenz (Proposition 4.1.14) mit dem Fünferlemma. □

4.1.3 Homotopien von Kettenabbildungen

Definition 4.1.18 (Kettenhomotopie, kettenhomotop, nullhomotop)**.** Seien $f, g\colon C \to C'$ zwei Kettenabbildungen. Eine *Kettenhomotopie* s von f nach g ist eine Familie von R-linearen Abbildungen $s = (s_n\colon C_n \to C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$g_n - f_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n.$$

Man sagt, dass f *kettenhomotop* zu g ist, und man schriebt $f \simeq g$, wenn eine Kettenhomotopie von f nach g existiert. Man sagt, dass f *nullhomotop* ist, wenn $f \simeq 0$.

Proposition 4.1.19 (Eigenschaften der Homotopierelation)**.** *Seien C, C' und C'' Kettenkomplexe von R-Moduln.*

(i) (Äquivalenzrelation) *Die Kettenhomotopierelation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C')$ der Kettenabbildungen von C nach C'.*

(ii) (Kompatibilität mit Modulstruktur) *Seien $f, g, h\colon C \to C'$ Kettenabbildungen und sei $r \in R$. Ist $f \simeq g$, so folgt $rf \simeq rg$ und $f + h \simeq g + h$.*

(iii) (Kompatibilität mit Komposition) *Seien $f, g\colon C \to C'$ und $h, k\colon C' \to C''$ Kettenabbildungen. Ist $f \simeq g$ und ist $h \simeq k$, so folgt $h \circ f \simeq k \circ g$.*

Beweis. Zu (i). Die Familie der Nullabbildungen $(0\colon C_n \to C'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie von f nach sich selbst. Ist s eine Kettenhomotopie von f nach g, so ist $-s$ eine

Kettenhomotopie von g nach f. Zur Transitivität sei noch t eine Kettenhomotopie von g nach h. Dann gilt

$$\begin{aligned}h_n - f_n &= (h_n - g_n) + (g_n - f_n)\\ &= (d'_{n+1} \circ t_n + t_{n-1} \circ d_n) + (d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n)\\ &= d'_{n+1} \circ (t_n + s_n) + (t_{n-1} + s_{n-1}) \circ d_n.\end{aligned}$$

Damit ist $t + s$ eine Kettenhomotopie von f nach h.

Zu (ii). Sei s eine Kettenhomotopie von f nach g. Dann ist rs eine Kettenhomotopie von rf nach rg, und s selbst ist auch eine Kettenhomotopie von $f + h$ nach $g + h$.

Zu (iii). Sei s eine Kettenhomotopie von f nach g und t eine Kettenhomotopie von h nach k. Dann gilt

$$\begin{aligned}k_n \circ g_n - h_n \circ f_n &= (k_n - h_n) \circ g_n + h_n \circ (g_n - f_n)\\ &= (d''_{n+1} \circ t_n + t_{n-1} \circ d'_n) \circ g_n + h_n \circ (d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n)\\ &= d''_{n+1} \circ t_n \circ g_n + t_{n-1} \circ g_{n-1}) \circ d_n + d''_{n+1} \circ h_{n+1} \circ s_n + h_n \circ s_{n-1} \circ d_n\\ &= d''_{n+1} \circ (t_n \circ g_n + h_{n+1} \circ s_n) + (t_{n-1} \circ g_{n-1} + h_n \circ s_{n-1}) \circ d_n,\end{aligned}$$

so dass $(t_n \circ g_n + h_{n+1} \circ s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie von $h \circ f$ nach $k \circ g$ ist. □

Bemerkung 4.1.20. Aus Proposition 4.1.19(i,ii) folgt unmittelbar, dass nullhomotope Kettenabbildungen von C nach C' einen R-Untermodul von $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C')$ bilden, und dass die Homotopierelation die zugehörige Äquivalenzrelation ist. Damit ist die Quotientenmenge $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C')/{\simeq}$ eigentlich ein Quotientenmodul.

Proposition 4.1.21 (Homotopieinvarianz der Homologie)**.** *Seien $f, g\colon C \to C'$ Kettenabbildungen, die zueinander kettenhomotop sind. Dann induzieren f und g dieselbe Abbildung zwischen Homologiegruppen: Es gilt $H_n(f) = H_n(g)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei $x \in Z_n(C)$ ein n-Zykel. Dann ist $H_n(f)([x])$ die Restklasse von $f_n(x)$ modulo $B_n(C')$. Man muss damit zeigen, dass $g_n(x) - f_n(x) \in B_n(C')$. Sei s eine Kettenhomotopie von f nach g. Nach Definition gilt dann

$$g_n(x) - f_n(x) = d'_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(\underbrace{d_n(x)}_{=0}) = d'_{n+1}(s_n(x)),$$

da x ein Zykel ist, so dass $g_n(x) - f_n(x) \in \operatorname{im} d'_{n+1} = B_n(C')$. □

Definition 4.1.22 (Kettenhomotopieäquivalenz)**.** Eine Kettenabbildung $f\colon C \to C'$ heißt *Kettenhomotopieäquivalenz*, wenn eine Kettenabbildung $g\colon C' \to C$ existiert, so dass

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_C \quad \text{und} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_{C'}\,.$$

Korollar 4.1.23. *Jede Kettenhomotopieäquivalenz ist ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Seien $f\colon C \to C'$ und $g\colon C' \to C$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_C$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{C'}$. Nach Proposition 4.1.21 und der Funktorialität von H_n (Bemerkung 4.1.10) gilt

$$\begin{aligned}H_n(g) \circ H_n(f) &= H_n(g \circ f) = H_n(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H_n(C)},\\ H_n(f) \circ H_n(g) &= H_n(f \circ g) = H_n(\mathrm{id}_{C'}) = \mathrm{id}_{H_n(C')}\,.\end{aligned}$$

Damit ist $H_n(f)$ ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus $H_n(g)$. □

Notation 4.1.24 (Homotopiekategorie)**.** Wegen Proposition 4.1.19 kann man eine Kategorie $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ wie folgt definieren:

- Objekte von $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ sind Kettenkomplexe von R-Moduln.

- Morphismen in $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ sind Kettenhomotopieklassen von Kettenabbildungen:

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C') := \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(C, C')/{\simeq}.$$

- Identitäten und Kompositionen in $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ sind dadurch eindeutig bestimmt, dass

$$\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \to \mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R), \quad C \mapsto C, \quad f \mapsto [f],$$

  ein Funktor ist.

Die Kategorie $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ heißt *Homotopiekategorie* von $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$. Nach Definition ist eine Kettenabbildung f genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz, wenn ihre Homotopieklasse $[f]$ ein Isomorphismus in $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ ist. Nach Proposition 4.1.21 gibt es zudem wohldefinierte Funktoren

$$H_n \colon \mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R, \quad C \mapsto H_n(C), \quad [f] \mapsto H_n(f),$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man schreibt auch $\mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ bzw. $\mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ für die volle Unterkategorie von $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ bestehend aus den nichtnegativen bzw. nichtpositiven Kettenkomplexen.

Bemerkung 4.1.25. In der Kategorie $\mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \cap \mathrm{Ch}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ sind alle Kettenhomotopien gleich Null. Damit kann man auch $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ mit einer vollen Unterkategorie von $\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ identifizieren, nämlich $\mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \cap \mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ (siehe Bemerkung 4.1.6).

Bemerkung 4.1.26 (additive Kategorien)**.** Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt *präadditiv*, wenn folgendes gilt:

- $\mathcal{A}$ besitzt ein *Nullobjekt* 0, d.h., ein Objekt, das gleichzeitig ein Anfangsobjekt sowie ein Endobjekt ist.

- Für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ existieren die Summe $X \sqcup Y$ sowie das Produkt $X \times Y$ in $\mathcal{A}$, und der Morphismus

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_X & 0_{Y,X} \\ 0_{X,Y} & \mathrm{id}_Y \end{pmatrix} : X \sqcup Y \to X \times Y$$

  ist ein Isomorphismus. Dabei ist $0_{X,Y}$ der *Nullmorphismus* $X \to 0 \to Y$.

Wenn $\mathcal{A}$ präadditiv ist, hat jede Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ eine kanonische Struktur von abelschem Monoid, wobei $f + g$ die folgende Komposition ist:

$$f + g \colon X \xrightarrow{(\mathrm{id}_X, f)} X \times Y \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)^{-1}} X \sqcup Y \xrightarrow{(g, \mathrm{id}_Y)} Y.$$

Die Kategorie $\mathcal{A}$ heißt dann *additiv*, wenn dieses Monoid für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ eine Gruppe ist. Die Kategorie $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ der R-Moduln über einem nicht unbedingt kommutativen Ring R ist das prototypische Beispiel einer additiven Kategorie (die direkte Summe $M \oplus N$ ist gleichzeitig eine Summe und ein Produkt). Die Kategorie $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ kann man für eine beliebige Kategorie $\mathcal{A}$ mit einem Nullobjekt definieren, und die Homotopiekategorie $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ kann man für eine beliebige additive Kategorie $\mathcal{A}$ definieren.

Bemerkung 4.1.27 (abelsche Kategorien)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie mit einem Nullobjekt und sei $f \colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Man definiert den *Kern* und den *Kokern* von f als den Limes und Kolimes vom Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & Y \end{tikzcd}$$

(sofern sie existieren). Eine *abelsche Kategorie* ist eine Kategorie mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{A}$ ist additiv (Bemerkung 4.1.26).
- Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ besitzt ein Kern sowie ein Kokern.
- Es gilt den *Homomorphiesatz* in $\mathcal{A}$: Für jeden Morphismus $f\colon X \to Y$ ist der kanonische Morphismus
$$\operatorname{coker}(\ker f \to X) \to \ker(Y \to \operatorname{coker} f)$$
ein Isomorphismus. Dieses Objekt heißt dann das *Bild* $\operatorname{im} f$ von f.

Für eine abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ kann man die Funktoren
$$Z_n, B_n, H_n\colon \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$
wie in Definition 4.1.8 definieren. Alle Sätze in diesem Abschnitt gelten eigentlich für beliebige abelsche Kategorien anstelle von $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$. Die Beweise muss man aber manchmal anpassen.

Bemerkung 4.1.28 (Vererbungseigenschaften additiver und abelscher Kategorien)**.**

(i) Ist $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie, so sind auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ und $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ additiv. Zudem gilt $\mathrm{Ch}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ch}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$ und $\mathrm{K}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{K}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}}$.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, so sind auch $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ und $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ abelsch, aber in den meisten Fällen ist $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ nicht abelsch (Kerne und Kokerne in $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ existieren nicht unbedingt).

4.2 Die Tor- und Ext-Funktoren

4.2.1 Abgeleitete Funktoren

In diesem Abschnitt arbeiten wir der Vollständigkeit halber mit einer beliebigen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ (siehe Bemerkung 4.1.27). Wir müssen aber hierzu annehmen, dass das Schlangenlemma 1.2.35 in einer beliebigen abelschen Kategorie bewiesen werden kann. Für die Anwendungen auf Tor- und Ext-Funktoren brauchen wir aber nur die Sonderfälle $\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ und $\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}}$.

Die folgende Definition verallgemeinert die Projektivität und Injektivität von Moduln (Definition 1.2.20) auf beliebige Kategorien. Zum Begriff des Monomorphismus bzw. des Epimorphismus siehe Definition LA.A.1.10.

Definition 4.2.1 (projektiv, injektiv)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

- X heißt *projektiv*, wenn folgendes gilt: Zu jedem Epimorphismus $e\colon Y' \twoheadrightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ und jedem Morphismus $f\colon X \to Y$ gibt es einen Morphismus $\hat{f}\colon X \to Y'$ mit $e \circ \hat{f} = f$:
$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, two heads, "e"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\exists \hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

- X heißt *injektiv*, wenn folgendes gilt: Zu jedem Monomorphismus $m\colon Y \hookrightarrow Y'$ in $\mathcal{C}$ und jedem Morphismus $f\colon Y \to X$ gibt es einen Morphismus $\hat{f}\colon Y' \to X$ mit $\hat{f} \circ m = f$:
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "m"'] & X. \\ Y' \arrow[ur, dashed, "\exists \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.2.2.

(i) In der Kategorie $\mathcal{S}\mathrm{et}$ der Mengen sind alle Mengen projektiv (nach dem Auswahlaxiom, siehe LA.1.4.2) und alle nicht-leeren Mengen injektiv. Die leere Menge ist nicht injektiv.

(ii) In der Kategorie $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ der R-Moduln sind Projektivität und Injektivität die gewöhnlichen Begriffe (nach Propositionen 1.2.22(iii) und 1.2.23(iii)).

Bemerkung 4.2.3. Die Begriffe "projektiv" und "injektiv" sind dual zueinander im folgenden Sinne: Ein Objekt X von $\mathcal{C}$ ist genau dann projektiv, wenn es als Objekt von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ injektiv ist.

Definition 4.2.4 (genügend projektive/injektive Objekte)**.** Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(i) Man sagt, dass $\mathcal{C}$ *genügend projektive Objekte besitzt*, wenn folgendes gilt: Zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es einen Epimorphismus $P \twoheadrightarrow X$ mit P projektiv.

(ii) Man sagt, dass $\mathcal{C}$ *genügend injektive Objekte besitzt*, wenn folgendes gilt: Zu jedem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ gibt es einen Monomorphismus $X \hookrightarrow Q$ mit Q injektiv.

Beispiel 4.2.5. Nach Beispiel 4.2.2(i) besitzt die Kategorie $\mathcal{S}\mathrm{et}$ der Mengen genügend projektive Objekte sowie genügend injektive Objekte.

Beispiel 4.2.6. Sei R ein Ring. Die Kategorie $\mathcal{M}\mathrm{od}_R$ der R-Moduln besitzt genügend projektive Objekte sowie genügend injektive Objekte, denn: Sei M ein R-Modul.

(i) Es gibt einen kanonischen Epimorphismus $R^{(M)} \twoheadrightarrow M$, wobei $R^{(M)}$ frei und damit projektiv ist.

(ii) Es gibt einen kanonischen Monomorphismus $M \hookrightarrow I(M)$ mit $I(M)$ injektiv, wobei

$$I(M) = (R^{(M^\vee)})^\vee \quad \text{und} \quad M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Satz 4.2.7 (Fundamentalsatz der homologischen Algebra)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.*

(i) *Seien $C, D \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ nichtnegative Kettenkomplexe mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *C_n ist projektiv für alle $n \geq 0$.*
(b) *Es gilt $H_n(D) = 0$ für alle $n \geq 1$.*

Dann ist die Abbildung

$$H_0\colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(C, D) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(H_0(C), H_0(D))$$

bijektiv.

(ii) *Seien $C, D \in \mathrm{Ch}_{\leq 0}(\mathcal{A})$ nichtpositive Kettenkomplexe mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *D_n ist injektiv für alle $n \leq 0$.*
(b) *Es gilt $H_n(C) = 0$ für alle $n \leq -1$.*

Dann ist die Abbildung

$$H_0\colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(C, D) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(H_0(C), H_0(D))$$

bijektiv.

Beweis. Es genügt (i) zu beweisen, da (ii) dieselbe Aussage in der dualen Kategorie $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ ist.

Zur Surjektivität. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "f_2"'] \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr] \arrow[dd, dashed, "f_1"'] \arrow[dr, dashed] & & C_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, dashed, "f_0"'] & H_0(C) \arrow[dd, "\varphi"] \\
& & B_1(D) \arrow[dr, hook] & & B_0(D) \arrow[dr, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & D_2 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & D_1 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & D_0 \arrow[r, two heads] & H_0(D).
\end{tikzcd}$$

Dabei ist der Morphismus $\varphi\colon H_0(C) \to H_0(D)$ gegeben, und man findet induktiv die Morphismen $C_n \to B_n(D)$ und $f_n\colon C_n \to D_n$ wie folgt. Da C_0 projektiv ist, gibt es eine Hochhebung $f_0\colon C_0 \to D_0$ des gegebenen Morphismus. Angenommen haben wir $C_n \to D_n$ schon gefunden. Nach (b) ist $B_n(D)$ der Kern von $d_n\colon D_n \to D_{n-1}$ (oder von $D_0 \to H_0(D)$, wenn $n = 0$). Damit lässt sich die Komposition $C_{n+1} \to C_n \to D_n$ durch $B_n(D)$ faktorisieren. Mit der Projektivität von C_{n+1} finden wir den gewünschten Morphismus $f_{n+1}\colon C_{n+1} \to D_{n+1}$. Nach Konstruktion ist dann $f = (f_n)_{n\geq 0}$ eine Kettenabbildung mit $H_0(f) = \varphi$.

Zur Injektivität. Wir bemerken zunächst, dass H_0 ein Gruppenhomomorphismus ist. Es genügt also zu zeigen, dass sein Kern trivial ist, d.h.: Ist $f\colon C \to D$ eine Kettenabbildung mit $H_0(f) = 0$, so ist f nullhomotop. Dazu betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_2 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_2"'] & & C_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "f_1"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddll, dashed, bend right, "s_1"'] & & C_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "f_0"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddll, dashed, bend right, "s_0"'] & H_0(C) \arrow[dd, "H_0(f)=0"] \\
& & B_1(D) \arrow[dr, hook] & & B_0(D) \arrow[dr, hook] & & \\
\cdots \arrow[r] & D_2 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & D_1 \arrow[rr] \arrow[ur, two heads] & & D_0 \arrow[r, two heads] & H_0(D).
\end{tikzcd}$$

Wir bilden induktiv eine Kettenhomotopie s von 0 nach f, d.h., so dass $f_n = d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$. Da $H_0(f) = 0$ landet f_0 im Kern $B_0(D)$ von $D_0 \to H_0(D)$. Da C_0 projektiv ist, gibt es eine Hochhebung $s_0\colon C_0 \to D_1$ von f_0. Angenommen haben wir $s_n\colon C_n \to D_{n+1}$ schon konstruiert. Wir betrachten dann den Morphismus $f_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}\colon C_{n+1} \to D_{n+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
d_{n+1} \circ (f_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) &= f_n \circ d_{n+1} - d_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\
&= (d_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} - d_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\
&= d_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} - d_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit landet $f_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}$ in $Z_{n+1}(D) = B_{n+1}(D)$, und mit der Projektivität von C_{n+1} kann man eine Hochhebung $s_{n+1}\colon C_{n+1} \to D_{n+2}$ finden. Nach Konstruktion gilt dann

$$d_{n+2} \circ s_{n+1} + s_n \circ d_{n+1} = (f_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) + s_n \circ d_{n+1} = f_{n+1}.$$

Damit ist s die gewünschte Nullhomotopie von f. □

Definition 4.2.8 (projektive/injektive Auflösung)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und sei $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.

(i) Eine *projektive Auflösung* von A ist eine exakte Sequenz

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to A \to 0,$$

wobei jedes P_n projektiv ist. Anders gesagt ist P_* ein nichtnegativer Kettenkomplex, der die Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4.2.7(i) erfüllt, mit einem Isomorphismus $H_0(P_*) \xrightarrow{\sim} A$.

(ii) Eine *injektive Auflösung* von A ist eine exakte Sequenz

$$0 \to A \to I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to \cdots ,$$

wobei jedes I_n injektiv ist. Anders gesagt ist I_* ein nichtpositiver Kettenkomplex, der die Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4.2.7(ii) erfüllt, mit einem Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} H_0(I_*)$.

Bemerkung 4.2.9 (Existenz projektiver/injektiver Auflösungen)**.** Besitzt $\mathcal{A}$ genügend projektive Objeke, so besitzt jedes Objekt A von $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung: Man konstruiert induktiv P_n mit einem Epimorphismus $P_n \twoheadrightarrow \ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$ (wobei $P_{-2} = 0$ und $P_{-1} = A$). Besitzt $\mathcal{A}$ genügend injektive Objekte, so besitzt ebenso jedes Objekt A von $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung.

Bemerkung 4.2.10 (projektive Auflösungen über regulären Ringen)**.** Sei R ein regulärer noetherscher Ring der Dimension d. Ein wichtiger und schwieriger Satz der Dimensionstheorie besagt, dass jeder R-Modul M eine projektive Auflösung $P_* \twoheadrightarrow M$ der Länge $\leq d$ besitzt, d.h., so dass $P_n = 0$ für alle $n > d$. Für einen Hauptidealring R folgt diese Aussage aus Proposition 1.2.31 (in diesem Fall ist $d = 1$).

Notation 4.2.11 (Kategorien von projektiven/injektiven Auflösungen)**.** Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

- Wir bezeichnen mit $\mathrm{ProjRes}(\mathcal{A})$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ bestehend aus Kettenkomplexen, die beide Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4.2.7(i) erfüllen.
- Wir bezeichnen mit $\mathrm{InjRes}(\mathcal{A})$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{A})$ bestehend aus Kettenkomplexen, die beide Bedingungen (a) und (b) aus Satz 4.2.7(ii) erfüllen.

Es gilt also $\mathrm{InjRes}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} = \mathrm{ProjRes}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$.

Korollar 4.2.12. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.*

(i) *Der Funktor*

$$H_0 \colon \mathrm{ProjRes}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

ist volltreu. Falls $\mathcal{A}$ genügend projektive Objekte besitzt, ist er auch wesentlich surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien.

(ii) *Der Funktor*

$$H_0 \colon \mathrm{InjRes}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$$

ist volltreu. Falls $\mathcal{A}$ genügend injektive Objekte besitzt, ist er auch wesentlich surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Der Funktor ist volltreu nach Satz 4.2.7 und wesentlich surjektiv nach Bemerkung 4.2.9. Volltreue und wesentlich surjektive Funktoren sind Äquivalenzen von Kategorien nach Satz LA.A.3.13. □

Definition 4.2.13 (additiver Funktor)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ additive Kategorien. Ein Funktor $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *additiv*, wenn er endliche Produkte erhält (siehe Bemerkung LA.A.2.10).

Bemerkung 4.2.14. Sei $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor. Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ist die Abbildung

$$F \colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y))$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dies folgt leicht aus der Definition der Addition von Morphismen in Bemerkung 4.1.26. Es folgt daraus, dass F Kettenkomplexe und Kettenhomotopien erhält. Es gibt damit induzierte Funktoren

$$F \colon \mathrm{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ch}(\mathcal{B}) \quad \text{und} \quad F \colon \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}(\mathcal{B}).$$

In der Situation von Korollar 4.2.12 gibt es (nach Definition von Äquivalenz) Funktoren

$$H_0^{-1} \colon \mathcal{A} \to \mathrm{ProjRes}(\mathcal{A}) \quad \text{und} \quad H_0^{-1} \colon \mathcal{A} \to \mathrm{InjRes}(\mathcal{A})$$

mit natürlichen Isomorphismen $H_0^{-1} \circ H_0 \cong \mathrm{id}$ und $H_0 \circ H_0^{-1} \cong \mathrm{id}$. Diese Funktoren sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie bestimmt.

Definition 4.2.15 (abgeleitete Funktoren)**.** Sei $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und sei $n \in \mathbb{N}$.

- Besitzt $\mathcal{A}$ genügend projektive Objekte, so definiert man die n-te *Linksableitung* $L_n F$ von F als die Komposition

$$L_n F \colon \mathcal{A} \xrightarrow{H_0^{-1}} \mathrm{ProjRes}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} \mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{B}) \xrightarrow{H_n} \mathcal{B}.$$

- Besitzt $\mathcal{A}$ genügend injektive Objekte, so definiert man die n-te *Rechtsableitung* $R^n F$ von F als die Komposition

$$R^n F \colon \mathcal{A} \xrightarrow{H_0^{-1}} \mathrm{InjRes}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{A}) \xrightarrow{F} \mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{B}) \xrightarrow{H_{-n}} \mathcal{B}.$$

Bemerkung 4.2.16. Konkreter gesagt:

(i) Ist $P_* \twoheadrightarrow A$ eine projektive Auflösung von A, so ist $L_n F(A)$ die n-te Homologie des Kettenkomplexes $F(P_*)$. Inbesondere gibt es einen kanonischen Morphismus $L_0 F(A) \to F(A)$.

(ii) Ist $A \hookrightarrow I_*$ eine injektive Auflösung von A, so ist $R^n F(A)$ die $(-n)$-te Homologie des Kettenkomplexes $F(I_*)$. Inbesondere gibt es einen kanonischen Morphismus $F(A) \to R^0 F(A)$.

Bemerkung 4.2.17. Ist $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ projektiv, so besitzt P die triviale projektive Auflösung $P_* \twoheadrightarrow P$ mit $P_0 = P$ und $P_n = 0$ für alle $n \geq 1$. Daraus folgt:

$$L_0 F(P) \cong F(P) \quad \text{und} \quad L_n F(P) = 0 \text{ für alle } n \geq 1.$$

Ist $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ injektiv, so folgt auf ähnliche Weise:

$$R^0 F(I) \cong F(I) \quad \text{und} \quad R^n F(I) = 0 \text{ für alle } n \geq 1.$$

Bemerkung 4.2.18. Nach Definition ist $L_n F = H_n \circ \mathbb{L}F$ mit einem Funktor

$$\mathbb{L}F \colon \mathcal{A} \to \mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{B}).$$

Der Funktor $\mathbb{L}F$ heißt die *totale Linksableitung* von F.

Auf ähnliche Weise ist $R^n F = H_{-n} \circ \mathbb{R}F$, wobei

$$\mathbb{R}F \colon \mathcal{A} \to \mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{B})$$

die *totale Rechtsableitung* von F ist.

Lemma 4.2.19 (Hufeisenlemma)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, sei*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, und seien $P_* \twoheadrightarrow A$ und $R_* \twoheadrightarrow C$ projektive Auflösungen von A und C. Dann gibt es eine projektive Auflösung $Q_* \twoheadrightarrow B$ von B und eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to P_* \to Q_* \to R_* \to 0,$$

so dass das folgende Diagram kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Beweis. Sei $Q_0 = P_0 \oplus R_0$. Dann ist Q_0 projektiv, und es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\iota_1} Q_0 \xrightarrow{\pi_2} R_0 \to 0.$$

Nach Projektivität von R_0 gibt es einen Morphismus $Q_0 \to B$, so dass das obige Diagramm kommutiert. Wendet man das Schlangenlemma auf dieses Diagramm an, so schließt man, dass $Q_0 \to B$ ein Epimorphismus ist, und dass die Sequenz der Kerne

$$0 \to \ker(P_0 \to A) \to \ker(Q_0 \to B) \to \ker(R_0 \to C) \to 0$$

wieder exakt ist. Außerdem sind die Morphismen $P_1 \to \ker(P_0 \to A)$ und $R_1 \to \ker(R_0 \to B)$ Epimorphismen nach Exaktheit von P_* und R_*. Wiederholt man nun die Konstruktion mit dieser neuen kurzen exakten Sequenz, so erhält man induktiv die gewünschte projektive Auflösung $Q_* \to B$. □

Proposition 4.2.20 (die lange exakte Sequenz von abgeleiteten Funktoren)**.** *Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien und sei*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$.

(i) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend projektive Objekte, so gibt es kanonische Morphismen*

$$\partial_n\colon L_nF(C) \to L_{n-1}F(A)$$

für alle $n \geq 1$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} L_1F(A) \to L_1F(B) \to L_1F(C) \xrightarrow{\partial_1} L_0F(A) \to L_0F(B) \to L_0F(C) \to 0.$$

(ii) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend injektive Objekte, so gibt es kanonische Morphismen*

$$\partial^n\colon R^{n-1}F(C) \to R^nF(A)$$

für alle $n \geq 1$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to R^0F(A) \to R^0F(B) \to R^0F(C) \xrightarrow{\partial^1} R^1F(A) \to R^1F(B) \to R^1F(C) \xrightarrow{\partial^2} \cdots.$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent durch Dualität. Nach dem Hufeisenlemma ist die gegebene kurze exakte Sequenz isomorph zur nullten Homologie einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \to P_* \to Q_* \to R_* \to 0$$

von Kettenkomplexen in $\mathrm{ProjRes}(\mathcal{A})$. Da R_n projektiv ist, ist die kurze exakte Sequenz

$$0 \to P_n \to Q_n \to R_n \to 0$$

spaltend, so dass sein Bild unter F wieder exakt ist. Damit erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen in $\mathcal{B}$:

$$0 \to F(P_*) \to F(Q_*) \to F(R_*) \to 0.$$

Nach Definition ist $L_nF(A/B/C)$ die n-te Homologie von $F(P_*/Q_*/R_*)$. Die lange exakte Homologiesequenz aus Proposition 4.1.14 ist dann die gewünschte exakte Sequenz. □

Bemerkung 4.2.21. Mit ein bisschen mehr Arbeit kann man zeigen:

(i) Die lange exakte Sequenz aus Proposition 4.2.20 ist funktoriell in der gegebenen kurzen exakten Sequenz (vgl. Proposition 4.1.14)

(ii) Die Konstruktionen $F \mapsto L_n F$ und $F \mapsto R^n F$ sind selbst Funktoren

$$L_n, R^n \colon \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

wobei $\mathrm{Fun}^{\mathrm{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset \mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die volle Unterkategorie der additiven Funktoren ist.

Definition 4.2.22 (rechtsexakter/linksexakter/exakter Funktor)**.** Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und sei $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor.

- F heißt *rechtsexakt*, wenn folgendes gilt: Für alle exakten Sequenzen

  $$A \to B \to C \to 0$$

  in $\mathcal{A}$ ist die induzierte Sequenz

  $$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

  auch exakt.

- F heißt *linksexakt*, wenn folgendes gilt: Für alle exakten Sequenzen

  $$0 \to A \to B \to C$$

  in $\mathcal{A}$ ist die induzierte Sequenz

  $$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

  auch exakt.

- F heißt *exakt*, wenn folgendes gilt: Für alle exakten Sequenzen

  $$0 \to A \to B \to C \to 0$$

  in $\mathcal{A}$ ist die induzierte Sequenz

  $$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

  auch exakt.

Bemerkung 4.2.23. Sei $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.

(i) F is genau dann rechtsexakt, wenn $F^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ linksexakt ist.

(ii) F ist genau dann exakt, wenn F gleichzeitig rechtsexakt und linksexakt ist.

(iii) Ist F exakt, so erhält F exakte Sequenzen beliebiger Länge.

Beispiel 4.2.24. Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul.

(i) Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, -) \colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ ist linksexakt (Proposition 1.2.7(i)).

(ii) Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-, M) \colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ ist linksexakt (Proposition 1.2.7(ii)).

(iii) Der Funktor $M \otimes_R (-) \colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ ist rechtsexakt (Proposition 1.2.9).

(iv) Ist $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus, so ist der Funktor $R' \otimes_R (-) \colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_{R'}$ rechtsexakt (nach (iii)).

(v) Ist $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, so ist der Funktor $S^{-1}(-)\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_{S^{-1}R}$ exakt (Proposition 1.3.18).

Proposition 4.2.25. *Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein additiver Funktor zwischen abelschen Kategorien.*

(i) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend projektive Objekte und ist F rechtsexakt, so ist der kanonische Morphismus $L_0F(A) \to F(A)$ ein Isomorphismus für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Außerdem ist F genau dann exakt, wenn $L_1F = 0$, und es gilt dann $L_nF = 0$ für alle $n \geq 1$.*

(ii) *Besitzt $\mathcal{A}$ genügend injektive Objekte und ist F linksexakt, so ist der kanonische Morphismus $F(A) \to R^0F(A)$ ein Isomorphismus für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Außerdem ist F genau dann exakt, wenn $R^1F = 0$, und es gilt dann $R^nF = 0$ für alle $n \geq 1$.*

Beweis. Es genügt (i) zu beweisen. Sei $P_* \twoheadrightarrow A$ eine projektive Auflösung von $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Nach Definition ist $L_0F(A) = H_0F(P_*)$. Nach Rechtsexaktheit von F ist die Sequenz

$$F(P_1) \to F(P_0) \to F(A) \to 0$$

exakt, so dass $H_0(F(P_*)) \cong F(A)$. Ist F sogar exakt, so ist die ganze Sequenz $F(P_*)$ exakt, so dass $L_nF(A) = H_n(F(P_*)) = 0$ für alle $n \geq 1$. Ist umgekehrt $L_1F = 0$, so ist F exakt nach der langen exakten Sequenz aus Proposition 4.2.20(i). □

4.2.2 Die Tor-Funktoren

Definition 4.2.26 (Tor-Funktor)**.** Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $n \in \mathbb{N}$. Der n-te *Tor-Funktor* $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ ist die n-te Linksableitung des Tensorprodukts $M \otimes_R (-)$.

Konkret gesagt, ist $P_* \twoheadrightarrow N$ eine projektive Auflösung von N, so gilt

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong H_n(M \otimes_R P_*).$$

Proposition 4.2.27 (die lange exakte Tor-Sequenz)**.** *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \to N \to P \to Q \to 0$$

von R-Moduln gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,P) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M,Q) \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow 0.$$

Zudem ist der R-Modul M genau dann flach, wenn $\mathrm{Tor}_1^R(M,-) = 0$, und in diesem Fall gilt $\mathrm{Tor}_n^R(M,-) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Beweis. Dies folgt aus Propositionen 4.2.20 und 4.2.25, da der Funktor $M \otimes_R (-)$ rechtsexakt ist. □

Beispiel 4.2.28 (Tor als Torsion)**.** Der Name „Tor“ kommt aus der folgenden Berechnung. Ist M ein R-Modul und ist $r \in R$ ein Nichtnullteiler, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, R/(r)) \cong M[r] := \{x \in M \mid rx = 0\} \subset M.$$

Denn wegen der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to R \xrightarrow{r\cdot} R \to R/(r) \to 0$$

und $\operatorname{Tor}_1^R(M,R)=0$ (da R projektiv ist) gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R(M, R/(r)) \to M \xrightarrow{r\cdot} M \to M/rM \to 0.$$

Sind $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[m] \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n,m)\mathbb{Z},\\
&\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}[m] = 0,\\
&\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})[m] \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Beispiel 4.2.29 (Tor über Körpern)**.** Ist K ein Körper, so sind alle K-Vektorräume frei und damit flach. Es gilt also $\operatorname{Tor}_n^K(V,W)=0$ für alle K-Vektorräume V,W und alle $n \geq 1$.

Beispiel 4.2.30 (Tor über Hauptidealringen)**.** Sei R ein Hauptidealring und seien M und N Moduln über R. Dann gilt $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)=0$ für alle $n \geq 2$. Denn nach Proposition 1.2.31 hat N eine projektive Auflösung der Form $0 \to P_1 \to P_0 \to N \to 0$.

Bemerkung 4.2.31 (Tor über regulären Ringen)**.** Als Verallgemeinerung der Beispiele 4.2.29 und 4.2.30 kann man die folgende Aussage aus Bemerkung 4.2.10 folgern: Ist R ein regulärer noetherscher Ring der Dimension d, so gilt $\operatorname{Tor}_n^R(M,N)=0$ für alle R-Moduln M,N und alle $n > d$.

Beispiel 4.2.32 (unendlich viele Tor-Moduln)**.** Sei $R = \mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als R-Modul durch den Ringhomomorphismus $R \to \mathbb{Z}$, $T \mapsto 1$, und wir berechnen die Tor-Moduln $\operatorname{Tor}_n^R(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Die alternierende Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{(T+1)\cdot} R \xrightarrow{(T-1)\cdot} R \xrightarrow{(T+1)\cdot} R \xrightarrow{(T-1)\cdot} R \to \mathbb{Z} \to 0$$

ist eine projektive Auflösung $P_* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ als R-Modul. Tensoriert man diese Auflösung mit $\mathbb{Z}$, so erhalten wir den Kettenkomplex

$$\cdots \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}.$$

Damit gilt

$$\operatorname{Tor}_n^R(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = H_n(\mathbb{Z} \otimes_R P_*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n = 0,\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist},\\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Algebraischen Topologie werden diese Tor-Gruppen mit den Homologiegruppen des unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raums $\mathbb{RP}^\infty$ identifiziert.

Bemerkung 4.2.33 (Tor und direkte Summen)**.** Der Funktor $\operatorname{Tor}_n^R(M,-)$ erhält direkte Summen, denn: Ist $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln und sind $P_{i,*} \twoheadrightarrow N_i$ projektive Auflösungen, so ist $\bigoplus_{i\in I} P_{i,*} \twoheadrightarrow \bigoplus_{i \in I} N_i$ eine projektive Auflösung. Die Behauptung folgt dann daraus, dass beide Funktoren $M \otimes_R (-)$ und H_n direkte Summen erhalten.

Satz 4.2.34 (Kommutativität von Tor)**.** *Sei R ein Ring und seien M und N Moduln über R. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\operatorname{Tor}_n^R(M,N) \cong \operatorname{Tor}_n^R(N,M).$$

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir ein paar Vorbereitungen. Unter einem *Doppelkomplex C* von R-Moduln verstehen wir einen Kettenkomplex von Kettenkomplexen

$C \in \mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R))$. Ein solches C kann man wie folgt darstellen:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{i+1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+1,j} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+1,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{i,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i,j} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{i-1,j+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-1,j} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-1,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Man bezeichnet dann mit $d^v : C_{i,j} \to C_{i-1,j}$ die vertikalen Randoperatoren und mit $d^h : C_{i,j} \to C_{i,j-1}$ die horizontalen Randoperatoren. Es gilt also

$$d^v \circ d^v = 0, \quad d^h \circ d^h = 0 \quad \text{und} \quad d^h \circ d^v = d^v \circ d^h.$$

Definition 4.2.35 (Totalkomplex)**.** Sei $C \in \mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R))$ ein Doppelkomplex. Man definiert den *Totalkomplex* $\mathrm{Tot}(C) \in \mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tot}(C)_n &= \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid x_i \in C_{i,n-i} \text{ und } x_i = 0 \text{ für alle } i \gg 0\}, \\ d((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) &= (d^v(x_{i+1}) + (-1)^i d^h(x_i))_{i\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen $(-1)^i$ gewährleistet, dass $d \circ d = 0$:

$$d^2 = (d^v + (-1)^{i+1} d^h)(d^v + (-1)^i d^h) = d_v^2 + (-1)^{i+1} d^h d^v + (-1)^i d^v d^h + d_h^2 = 0.$$

Bemerkung 4.2.36. Liegt der Doppelkomplex C außerhalb des unteren linken Quadranten (d.h., $C_{i,j} = 0$ für alle $i > 0$ und $j < 0$), so gilt

$$\mathrm{Tot}(C)_n = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C_{i,n-i}.$$

Liegt der Doppelkomplex C außerhalb des oberen rechten Quadranten (d.h., $C_{i,j} = 0$ für alle $i < 0$ und $j > 0$), so gilt

$$\mathrm{Tot}(C)_n = \prod_{i\in\mathbb{Z}} C_{i,n-i}.$$

Im Allgemeinen ist $\mathrm{Tot}(C)_n$ eine Mischung der Summe und des Produkts:

$$\mathrm{Tot}(C)_n = \prod_{i\leq 0} C_{i,n-i} \oplus \bigoplus_{i\geq 1} C_{i,n-i}.$$

Mit dieser Formel kann man auch $\mathrm{Tot}(C)$ in einer beliebigen additiven Kategorie definieren, sofern die relevanten unendlichen Summen und Produkte existieren.

Lemma 4.2.37 (Treppenlemma)**.** *Sei* $C \in \mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R))$ *ein Doppelkomplex mit exakten Zeilen* oder *mit exakten Spalten. Dann ist der Totalkomplex* $\mathrm{Tot}(C)$ *exakt.*

Beweis. Nach Symmetrie genügt es zu zeigen: Hat C exakte Zeilen, so ist $H_n(\mathrm{Tot}(C)) = 0$. Sei $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Z_n(\mathrm{Tot(C)})$ ein n-Zykel. Wir suchen eine $(n+1)$-Kette $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ in $\mathrm{Tot}(C)$ mit $d(y) = x$. Nach Definition gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x_i = 0$ für alle $i > k$. Man setzt dann $y_i = 0$ für $i > k$, und man konstruiert y_i für $i \leq k$ durch absteigende Induktion über i. Angenommen sind y_{i+1} und y_{i+2} schon konstruiert mit $x_{i+1} = d^v(y_{i+2}) + (-1)^{i+1}d^h(y_{i+1})$. Wegen $d(x) = 0$ gilt $d^v(x_{i+1}) + (-1)^i d^h(x_i) = 0$. Dann gilt

$$d^h(x_i - d^v(y_{i+1})) = d^h(x_i) - d^v(d^h(y_{i+1})) = (-1)^{i+1}d^v(x_{i+1}) + (-1)^i d^v(x_{i+1} - d^v(y_{i+2})) = 0.$$

Da $C_{i,*}$ exakt ist, gibt es ein $y_i \in C_{i,n+1-i}$ mit $d^h(y_i) = (-1)^i(x_i - d^v(y_{i+1}))$. Dann gilt

$$d^v(y_{i+1}) + (-1)^i d^h(y_i) = x_i - (-1)^i d^h(y_i) + (-1)^i d^h(y_i) = x_i,$$

d.h., es ist $d(y) = x$. □

Proposition 4.2.38. *Sei*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{2,2} \arrow[r] \arrow[d] & C_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{2,0} \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{1,2} \arrow[r] \arrow[d] & C_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{1,0} \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & C_{0,2} \arrow[r] & C_{0,1} \arrow[r] & C_{0,0}
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen und Spalten. Seien $H_0^h(C)$ *und* $H_0^v(C)$ *die induzierten Kettenkomplexe mit*

$$H_0^h(C)_n = \operatorname{coker}(C_{n,1} \to C_{n,0}) \quad \textit{und} \quad H_0^v(C)_n = \operatorname{coker}(C_{1,n} \to C_{0,n}).$$

Dann gibt es kanonische Quasiisomorphismen

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Tot}(C) \arrow[r] \arrow[d] & H_0^h(C) \\
H_0^v(C).
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $H_n(H_0^h(C)) \cong H_n(H_0^v(C))$.

Beweis. Man definiert den Morphismus $\operatorname{Tot}(C)_n \to H_0^h(C)_n$ als die Komposition

$$\operatorname{Tot}(C)_n = \bigoplus_{i=0}^{n} C_{i,n-i} \twoheadrightarrow C_{n,0} \twoheadrightarrow H_0^h(C)_n.$$

Man prüft leicht nach, dass diese Morphismen mit den Randoperatoren kompatibel sind. Sei C^h der Doppelkomplex, den man aus C erhält, indem man die nullte Spalte durch $\operatorname{im}(d^h\colon C_{*,1} \to C_{*,0})$ ersetzt. Dann hat C^h exakte Zeilen, und es gibt eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to \operatorname{Tot}(C^h) \to \operatorname{Tot}(C) \to H_0^h(C) \to 0.$$

Nach dem Treppenlemma ist die Homologie von $\operatorname{Tot}(C^h)$ trivial. Nach der langen exakten Homologiesequenz ist damit $\operatorname{Tot}(C) \to H_0^h(C)$ ein Quasiisomorphismus, wie gewünscht. Auf symmetrische Weise gibt es einen Quasiisomorphismus $\operatorname{Tot}(C) \to H_0^v(C)$. □

Bemerkung 4.2.39. Das Treppenlemma 4.2.37 und die Proposition 4.2.38 gelten auch in einer beliebigen abelschen Kategorie. Man muss aber den Beweis vom Treppenlemma anpassen, weil Objekte in einer abstrakten Kategorie keine Elemente besitzen.

Beweis von Satz 4.2.34. Seien $P_* \twoheadrightarrow M$ und $Q_* \twoheadrightarrow N$ projektive Auflösungen. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Tor}_n^R(M,N) &= H_n(M \otimes_R Q_*),\\ \operatorname{Tor}_n^R(N,M) &= H_n(N \otimes_R P_*).\end{aligned}$$

Um diese Moduln zu vergleichen, betrachten wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \otimes_R Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \otimes_R Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \otimes_R Q_0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_1 \otimes_R Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \otimes_R Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \otimes_R Q_0 \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & P_0 \otimes_R Q_2 \arrow[r] & P_0 \otimes_R Q_1 \arrow[r] & P_0 \otimes_R Q_0.
\end{tikzcd}$$

Da jedes P_i projektiv und damit flach ist, sind alle Zeilen exakt. Da jedes Q_j auch flach ist, sind auch alle Spalten exakt. Nach Proposition 4.2.38 und der Kommutativität des Tensorprodukts erhalten wir

$$H_n(M \otimes_R Q_*) \cong H_n(P_* \otimes_R N) \cong H_n(N \otimes_R P_*),$$

wie gewünscht. □

Beispiel 4.2.40. Sei M ein beliebiger R-Modul und sei

$$0 \to N \to P \to Q \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Ist Q flach, so ist die induzierte Sequenz

$$0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R P \to M \otimes_R Q \to 0$$

exakt. Denn es gilt $\operatorname{Tor}_1^R(M,Q) = \operatorname{Tor}_1^R(Q,M) = 0$.

Als Anwendung der Tor-Funktoren beweisen wir noch eine weitere Charakterisierung der endlich erzeugten projektiven Moduln (siehe Satz 1.3.50).

Proposition 4.2.41 (flache Moduln über lokalen Ringen)**.** *Sei R ein lokaler Ring und sei M ein R-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *M ist endlich erzeugt und frei.*

(ii) *M ist endlich erzeugt und projektiv.*

(iii) *M ist endlich präsentierbar und flach.*

Beweis. Die Äquivalenz (i) ⇔ (ii) ist bekannt (Proposition 1.2.45) und die Implikation (i) ⇒ (iii) ist klar. Sei M endlich präsentierbar und flach. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R und seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente von M, deren Restklassen modulo $\mathfrak{m}M$ eine Basis von $M/\mathfrak{m}M$ über $\kappa(\mathfrak{m})$ bilden. Nach Nakayama (Korollar 1.2.42) ist dann die Abbildung $f\colon R^n \to M$, $e_i \mapsto x_i$, surjektiv. Sei $N = \ker f$. Da M endlich präsentierbar ist, ist N ein endlich erzeugter R-Modul (Proposition 1.2.36(iv)). Nach Flachheit von M und Satz 4.2.34 gilt $\operatorname{Tor}_1^R(\kappa(\mathfrak{m}), M) = 0$. Damit gibt es eine exakte Sequenz

$$0 = \operatorname{Tor}_1^R(\kappa(\mathfrak{m}), M) \to \kappa(\mathfrak{m}) \otimes_R N \to \kappa(\mathfrak{m}) \otimes_R R^n \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} \kappa(\mathfrak{m}) \otimes_R M \to 0.$$

Die Abbildung $\mathrm{id} \otimes f$ ist aber bijektiv nach Definition von f, so dass $\kappa(\mathfrak{m}) \otimes_R N = 0$. Aus Nakayama folgt nun $N = 0$, d.h., $f\colon R^n \to M$ ist ein Isomorphismus. □

Korollar 4.2.42. *Sei R ein Ring und P ein R-Modul. Die äquivalenten Bedingungen* (i)–(iv) *aus Satz 1.3.50 sind weiter äquivalent zu:*

(v) *P ist endlich präsentierbar und flach.*

Beweis. Es gilt (i) $\Rightarrow$ (v) nach Korollar 1.2.25. Ist P endlich präsentierbar und flach, so ist $P_{\mathfrak{m}}$ ein endlich präsentierbarer flacher $R_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, und damit frei nach Proposition 4.2.41. Dies zeigt (v) $\Rightarrow$ (iv). $\square$

4.2.3 Die Ext-Funktoren

Definition 4.2.43 (Ext-Funktor)**.** Sei R ein Ring, sei M ein R-Modul und sei $n \in \mathbb{N}$. Der n-te *Ext-Funktor* $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$ ist die n-te Rechtsableitung des internen Homs $\mathrm{Hom}_R(M,-)$.

Konkret gesagt, ist $N \hookrightarrow I_*$ eine injektive Auflösung von N, so gilt

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong H_{-n}\mathrm{Hom}_R(M,I_*).$$

Proposition 4.2.44 (die lange exakte Ext-Sequenz in der zweiten Variablen)**.** *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \to N \to P \to Q \to 0$$

von R-Moduln gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,P) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,Q) \arrow[dll, rounded corners, "\partial^1"] \\
& \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M,P) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M,Q) \arrow[r, "\partial^2"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Zudem ist der R-Modul M genau dann projektiv, wenn $\mathrm{Ext}^1_R(M,-) = 0$, und in diesem Fall gilt $\mathrm{Ext}^n_R(M,-) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Beweis. Dies folgt aus Propositionen 4.2.20 und 4.2.25, da der Funktor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ linksexakt ist. $\square$

Nach Definition kann man die Moduln $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ mittels einer injektiven Auflösung von N berechnen. Der folgende Satz sagt, dass man sie auch mittels einer projektiven Auflösung von M (d.h., einer injektiven Auflösung in $\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}}$) berechnen kann:

Satz 4.2.45 (Beidhändigkeit von Ext)**.** *Sei R ein Ring und seien M und N Moduln über R. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = (R^n\mathrm{Hom}_R(M,-))(N) \cong (R^n\mathrm{Hom}(-,N))(M).$$

Beweis. Sei $P_* \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung (d.h., eine injektive Auflösung in $\mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}}$) und sei $N \hookrightarrow I_*$ eine injektive Auflösung. Die Behauptung ist dann, dass die nichtpositiven Kettenkomplexe $\mathrm{Hom}_R(M,I_*)$ und $\mathrm{Hom}_R(P_*,N)$ isomorphe Homologiemoduln haben. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(P_0,I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_0,I_{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_0,I_{-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_R(P_1,I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2,I_{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_1,I_{-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_R(P_2,I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2,I_{-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(P_2,I_{-2}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Da jedes P_i projektiv ist, ist jede Zeile exakt, und da jedes I_j injektiv ist, ist auch jede Spalte exakt. Die Behauptung folgt dann aus dem Treppenlemma 4.2.37 wie im Beweis von Proposition 4.2.38. $\square$

Konkret gesagt, ist $P_* \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M, so gilt

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong H_{-n}\mathrm{Hom}_R(P_*,N).$$

Proposition 4.2.46 (die lange exakte Ext-Sequenz in der ersten Variablen)**.** *Zu jeder kurzen exakten Sequenz*

$$0 \to K \to L \to M \to 0$$

von R-Moduln gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(L,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(K,N) \arrow[dll, "\partial^1"] & \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(L,N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(K,N) \arrow[r, "\partial^2"] & \cdots . \end{tikzcd}$$

Zudem ist der R-Modul N genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ext}^1_R(-,N)=0$, und in diesem Fall gilt $\mathrm{Ext}^n_R(-,N)=0$ für alle $n\geq 1$.

Beweis. Nach Satz 4.2.45 kann man $\mathrm{Ext}^n_R(-,N)$ mit der n-ten Rechtsableitung von

$$\mathrm{Hom}_R(-,N)\colon \mathcal{M}\mathrm{od}_R^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}\mathrm{od}_R$$

identifizieren. Die Aussage folgt dann aus Propositionen 4.2.20 und 4.2.25, da der Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ linksexakt ist. $\square$

Beispiel 4.2.47. Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $r\in R$ ein Nichtnullteiler. Dann gilt

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/(r),M) \cong M/rM.$$

Dies folgt wie im Beispiel 4.2.28 aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(R/(r),M) \to M \xrightarrow{r\cdot} M \to \mathrm{Ext}^1_R(R/(r),M) \to \mathrm{Ext}^1_R(R,M),$$

wobei $\mathrm{Ext}^1_R(R,M)=0$ nach Projektivität von R. Sind $n,m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, so gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n,m)\mathbb{Z},\\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}/n\mathbb{Q} = 0,\\ &\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/n(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong 0. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2.48 (Ext über regulären Ringen)**.** Sei R ein regulärer noetherscher Ring der Dimension d und seien M,N Moduln über R. Da man $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ mit einer projektiven Auflösung von M berchnen kann, folgt aus Bemerkung 4.2.10, dass $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)=0$ für alle $n>d$.

Beispiel 4.2.49 (unendlich viele Ext-Moduln)**.** Sei $R=\mathbb{Z}[T]/(T^2-1)$. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als R-Modul durch den Ringhomomorphismus $R\to\mathbb{Z}$, $T\mapsto 1$, und wir berechnen die Ext-Moduln $\mathrm{Ext}^n_R(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$. Die alternierende Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{(T+1)\cdot} R \xrightarrow{(T-1)\cdot} R \xrightarrow{(T+1)\cdot} R \xrightarrow{(T-1)\cdot} R \to \mathbb{Z} \to 0$$

ist eine projektive Auflösung $P_*\twoheadrightarrow\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ als R-Modul. Wenden wir den kontravarianten Funktor $\mathrm{Hom}_R(-,\mathbb{Z})$ auf P_* an, so erhalten wir den Kettenkomplex

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \cdots .$$

Damit gilt

$$\mathrm{Ext}^n_R(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = H_{-n}\mathrm{Hom}_R(P_*,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n=0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } n \text{ positiv und gerade ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Algebraischen Topologie werden diese Ext-Gruppen mit den Kohomologiegruppen des unendlich-dimensionalen reellen projektiven Raums $\mathbb{RP}^\infty$ identifiziert.

Bemerkung 4.2.50. Mit den obigen Beispielen und elementaren Berechnungsmethoden kann man fast alle Tor-Gruppen und Ext-Gruppen zwischen den abelschen Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ berechnen. Die Ausnahme dazu ist die Gruppe $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$. Man kann zeigen, dass folgender Isomorphismus gilt:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}.$$

Zum Schluss erklären wir den Zusammenhang zwischen Ext-Gruppen und Erweiterungen von Moduln.

Definition 4.2.51 (n-Erweiterung)**.** Seien M und N Moduln über R und sei $n \geq 1$.

- Eine *n-Erweiterung* E von M durch N ist eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \to N \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to M \to 0.$$

- Seien E und E' zwei n-Erweiterungen von M durch N. Ein *Morphismus von n-Erweiterungen* von E nach E' ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_N"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \\ N \arrow[r] & E'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E'_0 \arrow[r] & M. \end{tikzcd}$$

Ist E eine n-Erweiterung von M durch N, so kann man ein Element $\delta(E) \in \mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ wie folgt definieren. Sei E_* der nichtnegative Kettenkomplex

$$\cdots \to 0 \to N \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0,$$

so dass $H_0(E_*) \cong M$ und $H_n(E_*) = 0$ für alle $n \geq 1$. Sei $P_* \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung. Nach Satz 4.2.7(i) ist die Abbildung

$$H_0\colon \mathrm{Mor}_{\mathrm{K}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)}(P_*,E_*) \to \mathrm{Hom}_R(M,M)$$

bijektiv. Damit gibt es genau eine Kettenabbildung $h\colon P_* \to E_*$ bis auf Kettenhomotopie mit $H_0(h) = \mathrm{id}_M$. Durch Anwendung vom Funktor

$$\mathrm{K}_{\geq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R)^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(-,N)} \mathrm{K}_{\leq 0}(\mathcal{M}\mathrm{od}_R) \xrightarrow{H_{-n}} \mathcal{M}\mathrm{od}_R$$

erhalten wir eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(N,N) \twoheadrightarrow H_{-n}\mathrm{Hom}_R(E_*,N) \xrightarrow{h^*} H_{-n}\mathrm{Hom}_R(P_*,N) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M,N).$$

Sei $\delta(E)$ das Bild von id_N unter dieser Abbildung.

Satz 4.2.52 (explizite Beschreibung von Ext)**.** *Sei R ein Ring, seien M, N Moduln über R und sei $n \geq 1$. Dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \{n\text{-}\textit{Erweiterungen von } M \textit{ durch } N\}/\sim &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^n_R(M,N), \\ [E] &\mapsto \delta(E), \end{aligned}$$

wobei $\sim$ die folgende Äquivalenzrelation ist:

$$E \sim E' \iff \textit{es gibt Morphismen von } n\textit{-Erweiterungen } E \leftarrow E'' \rightarrow E'.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen:

(i) Ist $f\colon E \to E'$ ein Morphismus von n-Erweiterungen, so ist $\delta(E) = \delta(E')$.

(ii) Jedes Element von $\operatorname{Ext}^n_R(M,N)$ hat die Form $\delta(E)$.

(iii) Ist $\delta(E) = \delta(E')$ so gibt es Morphismen von n-Erweiterungen $E \leftarrow E'' \rightarrow E'$.

Aus (i) und (iii) folgt insbesondere, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zu (i). Sei $h\colon P_* \to E_*$ wie in der Definition von $\delta(E)$. Da $f\colon E_* \to E'_*$ die Identität von M auf H_0 induziert, kann man die Komposition $f \circ h\colon P_* \to E'_*$ in der Definition von $\delta(E')$ verwenden. Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_R(N,N) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & H_{-n}\operatorname{Hom}_R(E'_*,N) \arrow[d, "f^*"] \arrow[dr, "(f\circ h)^*"] & \\ & H_{-n}\operatorname{Hom}_R(E_*,N) \arrow[r, "h^*"'] & H_{-n}\operatorname{Hom}_R(P_*,N) \end{tikzcd}$$

liefert dann die Gleichheit $\delta(E) = \delta(E')$.

Zu (ii). Sei $P_* \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung von M, so dass

$$\operatorname{Ext}^n_R(M,N) = H_{-n}\operatorname{Hom}_R(P_*,N).$$

Ein Element $\alpha \in \operatorname{Ext}^n_R(M,N)$ ist damit die Äquivalenzklasse einer R-linearen Abbildung $f\colon P_n \to N$ mit $f \circ d_{n+1} = 0$. Sei $E_{n-1} = \operatorname{coker}((d_n, f)\colon P_n \to P_{n-1} \oplus N)$ und sei $E_i = P_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Dann ist die Sequenz

$$0 \to N \to E_{n-1} \to E_{n-2} \to \cdots \to E_0 \to M \to 0$$

exakt, d.h., eine n-Erweiterung E von M durch N. Nach Konstruktion induziert f eine Kettenabbildung $h\colon P_* \to E_*$ mit $H_0(h) = \mathrm{id}_M$. Aus der Definition von δ folgt nun $\delta(E) = \alpha$.

Zu (iii). Sei $P_* \twoheadrightarrow M$ eine projektive Auflösung und seien $h\colon P_* \to E_*$ und $h'\colon P_* \to E'_*$ mit $H_0(h) = \mathrm{id}_M = H_0(h')$. Aus $\delta(E) = \delta(E')$ folgt, dass $h_n\colon P_n \to N$ und $h'_n\colon P_n \to N$ im Kokern

$$H_{-n}\operatorname{Hom}_R(P_*,N) = \operatorname{coker}(d_n^*\colon \operatorname{Hom}_R(P_{n-1},N) \to \operatorname{Hom}_R(P_n,N))$$

gleich werden, d.h., es gibt ein $g\colon P_{n-1} \to N$ mit $h_n - h'_n = g \circ d_n$. Es gibt dann ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[r, "{(d_n,h_n)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & P_{n-1} \oplus N \arrow[d, "\wr"', "\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ g & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)"] \\ P_n \arrow[r, "{(d_n,h'_n)}"'] & P_{n-1} \oplus N, \end{tikzcd}$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ g & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)$ bijektiv ist, mit Umkehrabbildung $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -g & \mathrm{id} \end{smallmatrix}\right)$.

Wie im Beweis von (ii) definiert man nun $E''_{n-1} = \operatorname{coker}(d_n, h_n)$ und $E''_i = P_i$ für alle $i \in \{0, \dots, n-2\}$, so dass die Sequenz

$$0 \to N \to E''_{n-1} \to E''_{n-2} \to \cdots \to E''_0 \to M \to 0$$

exakt ist. Nach Konstruktion gibt es dann einen Morphismus von n-Erweiterungen $E'' \to E$. Das obige Quadrat induziert einen Isomorphismus $\operatorname{coker}(d_n, h_n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker}(d_n, h'_n)$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \operatorname{coker}(d_n, h_n) \arrow[dd, "\wr"'] \arrow[dr] & \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_{n-2}. \\ & \operatorname{coker}(d_n, h'_n) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dadurch erhalten wir auch einen Morphismus von n-Erweiterungen $E'' \to E'$. □

Bemerkung 4.2.53 (Modulstruktur auf n-Erweiterungen)**.** Durch die Bijektion aus Satz 4.2.52 bekommt die Menge der Äquivalenzklassen von n-Erweiterungen von M durch N eine Struktur von R-Modul. Die kann man explizit verstehen mit dem Beweis von (ii). Der Einfachheit halber erklären wir nur den Fall $n = 1$:

- Die Summe von zwei Erweiterungen $N \overset{f}{\hookrightarrow} E \overset{g}{\twoheadrightarrow} M$ und $N \overset{f'}{\hookrightarrow} E' \overset{g'}{\twoheadrightarrow} M$ ist die Erweiterung

  $$N \hookrightarrow E'' \twoheadrightarrow M, \quad \text{wobei} \quad E'' = \{(e, e') \in E \oplus E' \mid g(e) = g(e')\} / \operatorname{im}(f, -f').$$

  Diese Konstruktion heißt die *Baersche Summe* von Erweiterungen. Das neutrale Element ist die spaltende Erweiterung $N \hookrightarrow N \oplus M \twoheadrightarrow M$.

- Die Skalarmultiplikation von einer Erweiterung $N \overset{f}{\hookrightarrow} E \overset{g}{\twoheadrightarrow} M$ mit $r \in R$ ist die Erweiterung

  $$N \hookrightarrow E' \to M, \quad \text{wobei} \quad E' = \{(e, m) \in E \oplus M \mid g(e) = rm\}.$$

Bemerkung 4.2.54 (Ext in abelschen Kategorien)**.** Die linke Seite im Satz 4.2.52 bleibt sinnvoll in einer beliebigen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Damit kann man die Ext-Gruppen $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(X, Y)$ fur alle $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{A})$ definieren.

Index