Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
21.10.2021

Lineare Algebra I
Präsenzübungsblatt
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. Formulieren Sie die logische Negation (Verneinung) folgender Aussagen:

(a) Alle Anwälte sind unehrlich.

(b) Du trägst gleiche Socken zu dem Bewerbungsgespräch oder du wirst nicht eingestellt.

(c) In jeder Übungsgruppe dieser Vorlesung gibt es mindestens zwei Studierende, die eine andere Sprache fließend sprechen.

(d) Es gibt einen Studierenden in der Vorlesung, die allen anderen Studierenden in der Vorlesung eine E-Mail geschrieben hat, wenn diese ihn nicht angerufen haben.

Aufgabe 2. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass Sie einen Betrag von n Euro nur durch 2 und 5 Euro Münzen bezahlen können.

Aufgabe 3. Was ist falsch am folgenden Beweis?

Satz (Satz der eindeutigen Pferdfarbe)**.** *Alle Pferde haben die gleiche Farbe.*

Beweis. Wir verwenden das Induktionsprinzip, um die folgende genauere Aussage zu beweisen: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ und jede Menge $\{P_1, \ldots, P_n\}$ von n Pferden, haben alle Pferde $P_1, \ldots, P_n$ die gleiche Farbe. (Das ist hinreichend, weil nur endlich viele Pferde existieren.) Wenn $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich wahr.

Sei jetzt n beliebig und sei $\{P_1, \ldots, P_n\}$ eine Menge von n Pferden. Die Mengen $\{P_2, \ldots, P_n\}$ und $\{P_1, \ldots, P_{n-1}\}$ besitzen nur $n - 1$ Pferden. Nach der Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde $P_2, \ldots, P_n$ die gleiche Farbe und haben auch alle Pferde $P_1, \ldots, P_{n-1}$ die gleiche Farbe. Daraus folgt, dass alle Pferde $P_1, \ldots, P_n$ die gleiche Farbe haben. □

Aufgabe 4. Wir führen eine neue binäre logische Verknüpfung $\downarrow$ mit der folgenden Wahrheitstabelle ein:

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die Aussage $\varphi \downarrow \psi$ bedeutet also, dass weder φ noch ψ wahr sind.

Zeigen Sie, dass alle üblichen logischen Verknüpfungen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ mit $\downarrow$ allein darstellbar sind. Das heißt: Jede der Aussagen $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ und $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ist äquivalent zu einer Aussage, die nur aus φ, ψ, $\downarrow$ und Klammern aufgebaut wird.

Aufgabe 5. Imitieren Sie den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, um zu beweisen, dass auch $\sqrt{3}$ irrational ist.

Hinweis. Eine natürliche Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, hat die Form $3m + 1$ oder $3m + 2$.