

Lineare Algebra I
1. Übungsblatt
Abgabe: Do. 28.10.2021, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Beweisen Sie durch Induktion, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $7^n - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Bestimmen Sie (mit Begründung!), ob die folgenden Aussagen Tautologien sind:

- (a) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \neg\psi)$
- (b) $\neg(\neg\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
- (c) $(\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \neg\chi) \Rightarrow \varphi \vee \psi$
- (d) $\varphi \vee \psi \Rightarrow (\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \neg\chi)$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Seien A, B, C beliebige Mengen. Beweisen Sie die folgenden Mengengleichungen:

- (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Imitieren Sie den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, um zu beweisen, dass die dritte Wurzel $\sqrt[3]{2}$ auch irrational ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X eine Menge mit genau n Elementen. Beweisen Sie durch Induktion, dass die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

genau 2^n -viele Elemente hat.