Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
23.12.2021

Lineare Algebra I
10. Übungsblatt

Abgabe: Do. 13.01.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Matrizen über K in Zeilenstufenform oder in reduzierter Zeilenstufenform sind (die Antwort kann von der Charakteristik von K abhängen!):

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&6&0&0\\0&1&0&7\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&2&0&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um die Übungsaufgaben 5.3, 6.1, 6.2, 7.A, 7.B, 7.4(a) und 8.1 wieder zu lösen.

Aufgabe 1. (1+1+1+1+2 Punkte) Für die folgenden reellen Matrizen A und Vektoren b, bestimmen Sie jeweils mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A,b)$, d.h., finden Sie einen Vektor aus $\mathcal{L}(A,b)$ und eine Basis von $\mathcal{L}(A,0)$:

(a) $A = \begin{pmatrix}4&7\\3&5\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix}4&7&1\\3&5&1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix}1&0&-2&4&-1\\1&1&8&-7&-1\\2&0&-4&4&2\\0&-1&-10&6&5\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}2\\-7\\8\\14\end{pmatrix}$

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Bringen Sie die folgenden Matrizen A über $\mathbb{R}$ auf Zeilenstufenform, und finden Sie damit Basen von $\mathrm{ZR}(A)$ und von $\mathrm{SR}(A)$:

(a) $A = \begin{pmatrix}3&6&8&0&1\\-1&-2&-2&2&1\\2&4&5&-1&0\end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 15 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda + 2 & \mu - 2 \\ -3 & 2\lambda - 3 & \lambda^2 - \mu^2 + 2\mu + 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \lambda - \mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Paare (λ, μ), für die das Gleichungssystem (A, b) eine Lösung besitzt, und berechnen Sie die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \{0, 1, 2, 3\}, \quad (\lambda, \mu) \mapsto \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(A, 0).$$

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Berechnen Sie jeweils A^{-1} mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3i + 1 \\ i & 0 & -i \\ 1 & 3i - 1 & 8 \end{pmatrix}$.

(b) $K = \mathbb{F}_3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.