Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
13.01.2022

Lineare Algebra I
11. Übungsblatt

Abgabe: Do. 20.01.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Berechnen Sie das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

(a) $\sigma \in S_3$ beliebig.

(b) $\sigma \in S_5$ mit $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 5$, $\sigma(3) = 2$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 3$.

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Seien $\lambda \in K$ und $A \in M_n(K)$. Zeigen Sie, dass

$$\det(\lambda A) = \lambda^n A.$$

(b) Seien $\sigma \in S_n$ und $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ die zugehörige Permutationsmatrix über K (siehe Aufgabe 2 vom Übungsblatt 9). Zeigen Sie, dass

$$\det(P_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Aufgabe 1. (1+2 Punkte) Sei

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass X unter der Addition und der Multiplikation von Matrizen abgeschlossen ist, d.h.:

$$A, B \in X \implies A + B, A \cdot B \in X.$$

(b) Zeigen Sie, dass $(X, +, \cdot)$ ein Körper ist, der zu $\mathbb{C}$ isomorph ist, d.h.: Es existiert eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to X$, so dass

$$f(z + w) = f(z) + f(w) \quad \text{und} \quad f(z \cdot w) = f(z) \cdot f(w).$$

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte) Man betrachtet die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus $M_4(\mathbb{R})$. Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(A + B)$ mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Seien V, W Vekorräume über K, $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon V^n \to W$ eine n-lineare Abbildung. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist alternierend.

(b) Für jede linear abhängige Familie $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ gilt $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Hinweis. Wenn die Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, dann ist einer der Vektoren v_i eine Linearkombination der anderen.

Aufgabe 4. (2+1+2 Punkte) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der endlichen Dimension $n \neq 0$ und sei $\text{Basen}(V)$ die Menge aller Basen von V. Man definiert auf $\text{Basen}(V)$ die folgende Relation $\sim$:

$$B \sim C \iff \det(T_C^B) > 0,$$

wobei $T_C^B \in M_n(\mathbb{R})$ die Basiswechselmatrix von B nach C ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\text{Basen}(V)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Quotientenmenge $\text{Basen}(V)/{\sim}$ genau zwei Elemente hat.

Ein Element von $\text{Basen}(V)/{\sim}$ heißt eine *Orientierung* von V.

(c) Sei $\Delta \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Determinantenfunktion $\Delta(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Sei $P_{x,y}$ das Parallelogram mit Eckpunkten $0, x, y, x + y$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(x, y) = \pm \text{ Flächeninhalt von } P_{x,y},$$

und dass $\Delta(x, y)$ genau dann positiv ist, wenn $(x, y) \sim (e_1, e_2)$.