Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
20.01.2022

Lineare Algebra I
12. Übungsblatt

Abgabe: Do. 27.01.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit zwei Basen B und C. Man betrachte die Determinantenfunktionen Δ_B und Δ_C auf V. Nach der Klassifikation von Determinantenfunktionen gibt es einen Skalar $\lambda_C^B \in K$, so dass $\Delta_C = \lambda_C^B \cdot \Delta_B$. Wer ist λ_C^B?

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A_n = (a_{ij})_{i,j}$ die $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls } i = j, \\ -1, & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = n + 1$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst $\det(A_{n+2}) = 2\det(A_{n+1}) - \det(A_n)$.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren des Endomorphismus $s \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V \oplus V)$:

(a) $s(v, w) = (v + w, w)$.

(b) $s(v, w) = (v + w, v)$.

Aufgabe 3. (1+1+1+2) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A über K:

(a) $K = \mathbb{Q}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $K = \mathbb{F}_2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $K = \mathbb{F}_5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $K = \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} -1+i & -i & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1-i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, dessen Dimension ungerade ist. Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ einen Eigenvektor besitzt.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Finden Sie einen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der keine Eigenvektoren hat.

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$.