Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
27.01.2022

Lineare Algebra I
13. Übungsblatt

Abgabe: Do. 03.02.2022, 10:15

Einstiegsaufgabe A. (nicht abzugeben) Sei $\mathrm{Poly}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$, und sei $D \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Poly}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ der Endomorphismus mit

$$D(f) = f'.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von D. Ist D diagonalisierbar?

Einstiegsaufgabe B. (nicht abzugeben) Untersuchen Sie für die folgenden Matrizen jeweils, ob sie über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{F}_2$ diagonalisierbar sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1. (1+1 Punkte) Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind $\alpha, \beta \in K$, so ist $\alpha\lambda + \beta$ ein Eigenwert von $\alpha f + \beta\,\mathrm{id}_V$.

(b) Ist $\dim_K(V) < \infty$, so ist λ auch ein Eigenwert der dualen Abbildung $f^* \in \mathrm{End}_K(V^*)$.

Bemerkung. Aussage (b) gilt nicht bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen: Ist f ein surjektiver Endomorphismus, der nicht injektiv ist, so hat f den Eigenwert 0, aber der duale Endomorphismus f^* ist injektiv und damit ist 0 kein Eigenwert von f^*. Die Aussage gilt aber im Allgemeinen, wenn wir Eigenwerte durch Spektralwerte ersetzen.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte) Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^n = 0$.

(a) Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus. Falls $f \neq 0$, zeigen Sie, dass f nicht diagonalisierbar ist.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, finden Sie einen Endomorphismus f von K^n mit $f^n = 0$ und $f^{n-1} \neq 0$.

Hinweis. Nehmen Sie eine Dreiecksmatrix, deren Diagonalkoeffizienten alle null sind. Betrachten Sie zunächst die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Aufgabe 3. (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar sind. Wenn ja, finden Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. (2+2 Punkte)

(a) Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, so dass

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Diagonalisierung von A, zeigen Sie, dass

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(b) Sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die wie folgt definierte Folge von ganzen Zahlen:

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_{n+2} = G_{n+1} - 2G_n.$$

Finden Sie eine explizite Formel für G_n durch Diagonalisierung einer geeigneten Matrix.

Hinweis. Die gewünschte Formel enthält komplexe Zahlen.