Prof. Dr. Marc Hoyois
Dr. Denis Nardin
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg

WS 21/22
03.02.2022

Lineare Algebra I
14. Übungsblatt
(keine Abgabe)

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ der folgende Endomorphismus:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = (z_2, \ldots, z_n, z_1).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von f.

Hinweis. Sei $\zeta = \exp(2\pi i/n)$. Aus $\exp(2\pi i) = 1$ folgt, dass die n komplexen Zahlen ζ^i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, die n-ten Wurzeln von 1 sind.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{C}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von f.

Aufgabe 2. Finden Sie jeweils die Polynome $q, r \in K[T]$, so dass $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$:

(a) $f = T^2 + T + 1$, $g = T + 1$.

(b) $f = T^4 + T + 1$, $g = T - 2$.

(c) $f = T^3 + 2T^2 - 5T$, $g = T^2 + T + 1$.

(d) $f = -T^4 + T^3 + 1$, $g = T^2 + 1$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $p = aT^2 + bT + c$ ein Polynom des zweiten Grades über K (d.h., $a \neq 0$). Sei $\Delta = b^2 - 4ac \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $\delta \in K$ eine Quadratwurzel von Δ, so sind $\dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ Nullstellen von p.

(b) Ist umgekehrt λ eine Nullstelle von p, so ist $2a\lambda + b$ eine Quadratwurzel von Δ.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $p = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0$ ein monisches Polynom vom Grad n über K. Die *Begleitmatrix* zu p ist die $n \times n$-Matrix

$$A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\chi_{A(p)} = p$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in K$ gilt $\mu^{\mathrm{geom}}_{A(p)}(\lambda) \leq 1$. Schließen Sie daraus, dass die Matrix $A(p)$ genau dann diagonalisierbar ist, wenn p n verschiedene Nullstellen besitzt.